Differentialgleichungen für Ingenieure WS 06/07
Doz.: Dr. M. Karow; Ass.: A. Shumilina
http://www.moses.tu-berlin.de/Mathematik/

Lösungen zum Rechenteil der Februar-Klausur

1. Aufgabe

$y' = \frac{1}{x}y + 5$ – linear,

$y_h = ce^{\int \frac{dx}{x}} = ce^{\ln x} = cx, \ c \in \mathbb{R}$,

$y = cx \int \frac{5\,dx}{cx} = 5x \ln x + \tilde{c}x, \ \tilde{c} \in \mathbb{R}$,

$y(1) = 3 \implies \tilde{c} = 3$,

$y(x) = 5x \ln x + 3x$.

2. Aufgabe

Die Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(7-\lambda) + 9 = 7 - 8\lambda + \lambda^2 + 9 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \implies$$

$\lambda_{1,2} = 4$.

Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = 4$:

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 3 \\ -3 & 7-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$u_1 = u_2$, also z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir müssen noch einen Hauptvektor suchen.

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies w_2 = \frac{3w_1 + 1}{3}, \text{ z.B. } \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{x}_h(t) = e^{4t} \left(c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right).$$

Ansatz für eine partikuläre Lösung: $\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies b = 0, \ a = -1.$$

$$\vec{x}(t) = e^{4t}\left(c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\left(\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\right) + \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe

$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x,\ y'(x) = -c_1\sin x + c_2\cos x.$

$y(0) - y'(0) = c_1 - c_2 = 1,\ \gamma y(\pi) - y'(\pi) = -\gamma c_1 + c_2 = 0.$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\-\gamma & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Bei $\gamma = 1$ ist die Determinante der Matrix gleich Null,

und das RWP ist unlösbar.

Sonst gibt es eine eindeutige Lösung :

$$y(x) = \frac{1}{1-\gamma}\cos x + \frac{\gamma}{1-\gamma}\sin x.$$

4. Aufgabe

$\mathcal{L}[x](s) =: X(s),\ \mathcal{L}[\ddot{x}](s) = s^2\mathcal{L}[x](s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2X(s) - s + 3,$

$s^2X(s) - s + 3 - 9X(s) = 6e^{-3s},$

$X(s^2-9) = 6e^{-3s} + s - 3,$

$$X = \frac{6e^{-3s}}{s^2-9} + \frac{1}{s+3},$$

$$\frac{1}{s^2-9} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+3}\right),$$

$$e^{-3s}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+3}\right) = e^{-3s}\mathcal{L}[e^{3t} - e^{-3t}](s) = e^{-3s}\mathcal{L}[2\sinh(3t)](s) =$$

$$= \mathcal{L}[2u_3(t)\sinh(3(t-3))](s),$$

$x(t) = 2u_3(t)\sinh(3t-9) + e^{-3t}.$

5. Aufgabe

$tu_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 1$

$u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x,1) = 7\cos\left(\frac{3x}{2}\right).$

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t) \implies tX(x)T'(t) = X''(x)T(t),$

$$\frac{tT'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

$X''(x) = \lambda X(x),\ X'(0) = X(\pi) = 0$:

I) $\lambda > 0:\ X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$

$X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x}.$

$X'(0) = c_1\sqrt{\lambda} - c_2\sqrt{\lambda} = 0 \implies c_1 = c_2.$

$X(\pi) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi}(1 + e^{-2\sqrt{\lambda}\pi}) = 0$

$\implies c_1 = c_2 = 0 \implies X(x) \equiv 0.$

II) $\lambda = 0:\ X(x) = c_1 + c_2 x,\ X'(x) = c_2.$

$X'(0) = c_2 = 0,\ X(\pi) = c_1 = 0 \implies X(x) \equiv 0.$

III) $\lambda < 0:\ X(x) = c_1\cos\sqrt{-\lambda}x + c_2\sin\sqrt{-\lambda}x,$

$X'(x) = -c_1\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}x + c_2\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}x,$

$X'(0) = c_2\sqrt{-\lambda} = 0 \implies c_2 = 0,$

$X(\pi) = c_1\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \implies c_1 = 0$ oder $\sqrt{-\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{N}_0.$

Nichttriviale Lösungen $X_n(x) = c_n\cos((n + \frac{1}{2})x)$

gibt es also für $\lambda_n = -(n + \frac{1}{2})^2,\ n \in \mathbb{N}_0.$

$$T_n'(t) = \frac{\lambda_n}{t}T_n(t) \implies T_n(t) = \tilde{c}_n t^{-\lambda_n} \implies$$

$u_n(x,t) = \hat{c}_n t^{-(n+1/2)^2}\cos((n + \frac{1}{2})x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

sind Lösungen der PDG, die die Randbedingungen erfüllen.

$u(x,t) = 7t^{-9/4}\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ für $n = 1$ erfüllt auch die Anfangbedingung.