Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 06/07
Karow 21. Februar 2007

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 9 Punkte

Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte und ihr Stabilitätsverhalten. Skizzieren Sie das zugehörige Phasenportrait:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Tipp zum Zeichnen des Phasenportraits (optional): Zeigen Sie, dass die Funktion $r^2(x) = x_1^2 + x_2^2$ eine Erhaltungsgröße des Systems ist.

2. Aufgabe 6 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangwertproblems

$$y' - 2y - y^2 = 1, \quad y(1) = -1.$$

Ist sie eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Aufgabe 10 Punkte

Beantworten Sie mit Begründung:

a) Welche der folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung sind linear?

   i) $y' + xy - 3 = 0, \; y = y(x)$,

   ii) $y' + 2\sin x = 0, \; y = y(x)$,

   iii) $\dot{x} + \cos x = 0, \; x = x(t)$.

b) Welche der folgenden DGL-Systeme 1. Ordnung sind linear?

   i) $\begin{cases} \dot{x} = y - x, \\ \dot{y} = xy - 2, \end{cases} \qquad x = x(t), \; y = y(t),$

   ii) $\begin{cases} \dot{u} = tu - v\sin t, \\ \dot{v} = v\ln t + 5u - 1, \end{cases} \qquad u = u(t), \; v = v(t).$

4. Aufgabe 6 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an (Antworten ohne Begründung bringen keine Punkte).

a) Alle Lösungen der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ haben die Form

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

b) Angenommen, die lineare DGL $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$ hat einen von Null verschiedenen Gleichgewichtspunkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist Null ein Eigenwert der Matrix A.

c) Die Dimension des Lösungsraums einer linearen homogenen DGL ist gleich der Anzahl aller möglichen Lösungen dieser DGL.

5. Aufgabe 9 Punkte

Geben Sie jeweils die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL und den richtigen Ansatz zur Ermittlung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL, ohne diese partikuläre Lösung zu berechnen.

a) $y'' - y' = 3x^2$, b) $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$, c) $y'' + y = 2xe^x\cos x + 1$.