Technische Universität Berlin – Fakultät II – Institut für Mathematik

Differentialgleichungen für Ingenieure WS 06/07

Doz.: Dr. M. Karow; Ass.: A. Shumilina

http://www.moses.tu-berlin.de/Mathematik/

Lösungen zum Verständnisteil der Februar-Klausur

1. Aufgabe

$(0, 0)$ ist der einzige Gleichgewichtspunkt, er ist stabil:

Die Eigenwerte der Matrix sind $\lambda_{1,2} = \pm i$, sie haben nichtpositive Realteile und sind verschieden (somit ist ihre geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen).

Eine Begründung zum Phasenportrait (insgesamt 3 Punkte):

$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 \implies \dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\dfrac{x_1}{x_2}$ (formal für $\dot{x}_1 \neq 0$ bzw. $x_2 \neq 0$).

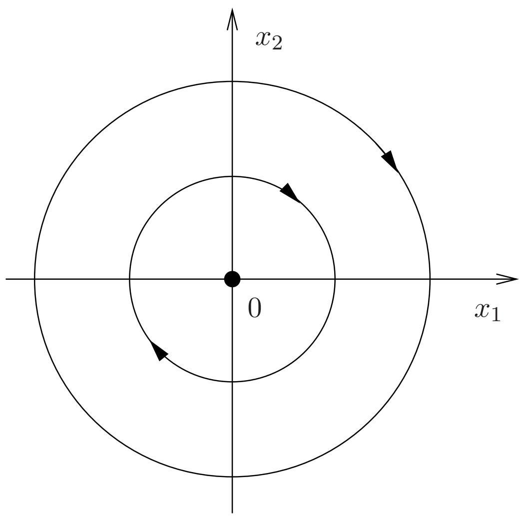
$\int x_2\, dx_2 = -\int x_1\, dx_1 \implies \dfrac{x_2^2}{2} = -\dfrac{x_1^2}{2} + c \implies$

$x_1^2 + x_2^2 = \tilde{c},\ \tilde{c} = 2c \in \mathbb{R}_0^+$ (Kreise mit dem Radius $\sqrt{\tilde{c}}$).

Alternativ: $\dfrac{d(r^2(x))}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_2x_1 = 0$ (2 Punkte). Jede Lösungskurve verläuft innerhalb von einer Niveaulinie dieser Funktion (1 Punkt).

Eine andere Alternative: Phasen-DGL aufstellen (1 Punkt) und das Richtungsfeld (1 Punkt) zeichnen. Aufgrund des Richtungsfelds Lösungskurven skizzieren (1 Punkt).

x_2 wächst, wenn x_1 negativ ist, fällt, wenn x_1 positiv ist.



(Achsen, Lösungen, Richtungen)

2. Aufgabe

$y' = y^2 + 2y + 1$, oder $y' = (y+1)^2$, ist eine separable DGL.

$y(x) = -1$ ist eine konstante Lösung der Differentialgleichung.

Sie erfüllt außerdem die Anfangsbedingung.

Das ist auch die einzige Lösung des Anfangwertproblems,

da die rechte Seite der DGL stetig differenzierbar ist, und der Existenz- und Eindeutigkeitssatz angewendet werden kann.

3. Aufgabe

a) Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung für eine unbekannte Funktion $y = y(x)$ haben die Form:

$$y' = a(x)y + b(x)$$

mit bekannten Funktionen $a(x)$ und $b(x)$.

i) linear, $a(x) = -x,\ b(x) = 3$,
ii) linear, $a(x) = 0,\ b(x) = -2\sin x$,
iii) nichtlinear wegen $\cos x$, da $x = x(t)$ die gesuchte Funktion ist.

b) Ein lineares System 1. Ordnung für $\vec{x} = \vec{x}(t)$ lässt sich in der Form

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)$$

mit bekannten matrix- und vektorwertigen Funktionen $A(t)$ und $\vec{b}(t)$ schreiben.

i) nichtlinear, da die rechte Seite den Produkt xy der gesuchten Funktionen $x = x(t)$ und $y = y(t)$ enthält,
ii) linear: $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -\sin t \\ 5 & \ln t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

4. Aufgabe

a) Falsch. Die d'Alembert-Lösung der Wellengleichung ist z. B. nicht von der Form $X(x)T(t)$.

b) Wahr. Nullpunkt ist immer ein GGP eines linearen homogenen DGL-Systems. Hat das System $A\vec{x} = \vec{0}$ noch andere Lösungen, so muss $\det A$ gleich Null sein. Folglich ist Null ein Eigenwert der Matrix A.

c) Falsch. Eine DGL hat unendlich viele Lösungen. Entscheidend ist jedoch die maximale Anzahl von linear unabhängigen Lösungen.

5. Aufgabe

a) $y'' - y' = 3x^2 \implies P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0 \implies \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1.$

Die Lösung der homogenen DGL: $y_h = c_1 + c_2 e^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Erstansatz zur Lösung der inhomogenen DGL: $a_1x^2 + a_2x + a_3$, Resonanz.

Ansatz wegen Resonanz: $y_p = (a_1x^2 + a_2x + a_3)x.$

b) $y'' + 2y' + y = 4e^{-x} \implies P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = -1.$

Die Lösung der homogenen DGL: $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Erstansatz zur Lösung der inhomogenen DGL: ae^{-x}, Resonanz.

Der Ansatz wegen Resonanz: $y_p = ax^2 e^{-x}$.

c) $y'' + y = 2xe^x \cos x + 1,\ P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm i.$

Die Lösung der homogenen DGL: $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Erstansatz zur Lösung der inhomogenen DGL:

$e^x((a_1 x + a_2)\cos x + (b_1 x + b_2)\sin x) + c.$

Keine Resonanz, also der Ansatz bleibt.