Musterlösung Rechenteil — DGL, 20. Februar 2008

1. Aufgabe

10 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 4 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2(-\lambda) - 4 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = -(\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0$$

ergeben sich der doppelte Eigenwert 1 und der einfache Eigenwert 4.

Eigenraum zum Eigenwert 1 ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$,

der nur Dimension 1 besitzt.
Folglich ist ein Hauptvektor h zu 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es ist z.B.

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*plus einem reellen Vielfachen des Eigenvektors*).

Eigenraum zu 4 ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Damit können wir die allgemeine Lösung anschreiben:

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) + C_3 \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Für $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ gilt

$$\begin{aligned}
(s^2Y(s) + s - 2) + 3(sY(s) + 1) + 2Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} \\
(s^2 + 3s + 2)Y(s) + s + 1 &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} \\
(s^2 + 3s + 2)Y(s) &= -s - 1 + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} \\
(s^2 + 3s + 2)Y(s) &= \frac{-s^3 - s^2 + s + 2}{s^2} \\
Y(s) &= \frac{-s^3 - s^2 + s + 2}{(s^2 + 3s + 2)s^2}
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

$$\begin{aligned} u_t &= 9u_{xx} \quad (0 \le x \le \pi) \\ u(x,0) &= -1 - 2\cos 2x, \\ u_x(0,t) &= 0, \\ u_x(\pi,t) &= 0. \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t), \implies X(x)T'(t) = 9X''(x)T(t) \implies \frac{T'(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$.

Die linke Seite ist nur von t abhängig, und die rechte nur von x, also sind die beiden Seiten konstant $(= -\lambda)$. Das liefert die folgenden DGLn:

$T'(t) = -\lambda 9T(t) \quad \implies \quad T = c_1 \mathrm{e}^{-\lambda 9t}$.
$X''(x) = -\lambda X(x),\ X'(0) = X'(\pi) = 0,$

a) $\lambda < 0:\ X(x) = c_2\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + c_3\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = c_3 = 0 \quad \implies \quad X \equiv 0$.

b) $\lambda = 0:\ X(x) = c_2x + c_0,\ X'(x) = c_2$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = 0 \quad \implies \quad X(x) = c_0$.

c) $\lambda = k^2 > 0:\ X(x) = c_2\cos kx + c_3 \sin kx,\ X'(x) = -c_2k\sin kx + c_3k\cos kx,$

$X'(0) = c_3k = 0\ (k \ne 0) \implies c_3 = 0.$

$X'(\pi) = -c_2k\sin k\pi = 0\ (k \ne 0) \quad \implies \quad c_2 = 0$ oder $k = n,\ n \in \mathbb{N}, n > 0$.

Also haben wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung

$$u_n(x,t) = a_n\mathrm{e}^{-(3n)^2t}\cos nx,$$

und mit Superposition und $a_0 := c_0$ erhalten wir

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\mathrm{e}^{-(3n)^2t}\cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\mathrm{e}^{-(3n)^2t}\cos nx.$$

Jetzt müssen wir die Koeffizienten a_n so wählen, dass diese Lösung die Anfangsbedingung erfüllt:

$$-1 - 2\cos 2x = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$$

Damit folgt

$$a_0 = -1, \quad a_2 = -2 \quad \text{und} \quad a_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,2\}.$$

Mit diesen Koeffizienten bekommen wir die Lösung des AWPs:

$$u(x,t) = -1 - 2\mathrm{e}^{-36t}\cos 2x.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Die Laplace-Gleichung innerhalb der punktierten Kreisscheibe wird wegen

$$\Delta\left(r^{|l|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi}\right) = (l(l-1)+l-l^2)r^{|l|-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi} = 0.$$

von den Ansatzfunktionen $r^{|l|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi}$ für jedes $l \in \mathbb{Z}$ gelöst. Der Ansatz lautet also

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l r^{|l|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi}.$$

Damit bleibt nur noch die Anpassung an die vorgegebene Randfunktion. Es ist allgemein

$$-2x^2 + 2x = -2r^2\cos^2\varphi + 2r\cos\varphi.$$

Die Koeffizienten c_l sind so zu bestimmen, dass für $r = 1$

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi} = -2\cos^2\varphi + 2\cos\varphi.$$

Wegen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi} = \cos l\varphi + \mathrm{i}\sin l\varphi$ müssen wir die rechte Seite in die Form „$\cos l\varphi, \sin l\varphi$" bringen:

$$\begin{aligned} -2\cos^2\varphi &= -1 - \cos 2\varphi \\ &= -1 - \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}\right) \\ 2\cos\varphi &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{aligned}$$

also ist

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi} = -1 - \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$$

$$\Longrightarrow\ c_{-2} = -\tfrac{1}{2},\quad c_{-1} = 1,\quad c_0 = -1,\quad c_1 = 1,\quad c_2 = -\tfrac{1}{2},$$
$$c_l = 0 \text{ für } l \in \mathbb{Z}\setminus\{-2,-1,0,1,2\}.$$

Der für u gemachte Ansatz führt dann auf

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = -\tfrac{1}{2}r^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi} + r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} - 1 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \tfrac{1}{2}r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi} = -1 + 2r\cos\varphi - r^2\cos 2\varphi.$$

In kartesischen Koordinaten:

$$u(x,y) = -1 + 2x - x^2 + y^2$$