Musterlösung Verständnisteil — DGL, 20. Februar 2008

1. Aufgabe

10 Punkte

Die homogenen Lösungen liest man als e^{0x}, $x\mathrm{e}^{0x}$ und $\operatorname{Re}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$.

Nullstellen: 0 doppelt, 2i einfach.

Weil das charakteristische Polynom reell ist, ist auch $-2\mathrm{i}$ einfache Nullstelle.

Weil es vom Grad 4 ist, gibt es keine weiteren Nullstellen. Für es berechnet man:

$$\lambda^2(\lambda+2\mathrm{i})(\lambda-2\mathrm{i}) = \lambda^2(\lambda^2+4) = \lambda^4+4\lambda^2$$

Es ist $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 4$ und $a_3 = 0$.

Als vierte, von den vorgegebenen drei Lösungen linear unabhängige Lösung ist z.B. $\sin 2x$ heranzuziehen. Eine Lösungsbasis lautet $\{1, x, \cos 2x, \sin 2x\}$.

2. Aufgabe

6 Punkte

$$\begin{aligned}
xu_{yy} + yu_{xx} = 0 \implies xY'' + yX'' = 0 \\
\implies -\frac{X''}{x} = \frac{Y''}{y} =: \lambda \\
\implies X''(x) = -\lambda x \text{ und } Y''(y) = \lambda y \\
\implies X(x) = -\frac{\lambda}{6}x^3 + Ax + B, \text{ und } Y(y) = \frac{\lambda}{6}y^3 + Cy + D
\end{aligned}$$

3. Aufgabe 9 Punkte

Gleichgewichtspunkte (x^*, y^*) erfüllen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x^* - 3y^*\mathrm{e}^{-x^*} &= 0, \\ 3x^*\mathrm{e}^{-y^*} - y^* &= 0. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(x^*, y^*) = (0, 0)$ eine Lösung.

Um weitere Lösungen erhalten zu können, setzen wir beide Gleichungen zusammen:

$$\begin{aligned} -x^* - 3\left(3x^*\mathrm{e}^{-y^*}\right)\mathrm{e}^{-x^*} &= 0 \\ 1 + 9\mathrm{e}^{-(x^*+y^*)} &= 0 \end{aligned}$$

Weil die reelle Exponentialfunktion stets positiv ist, ist diese Gleichung unlösbar.

Alternativ: Jeder Gleichgewichtspunkt (x^*, y^*) löst auch das homogene Gleichungssystem in (x, y)

$$\begin{aligned} -x - 3y\mathrm{e}^{-x^*} &= 0, \\ 3x\mathrm{e}^{-y^*} - y &= 0. \end{aligned}$$

Die Determinante ist $1+9\mathrm{e}^{-(x^*+y^*)}$, welche niemals verschwindet. Also ist $(x, y) = (0, 0)$ die einzige Lösung.

Die Stabilität wird nach dem Stabilitätssatz für den nicht-linearen Fall anhand der Eigenwerte der Matrix des linearisierten Systems beurteilt. Die Jacobi-Matrix an der Stelle $(0, 0)$ lautet hier:

$$\begin{pmatrix} -1 + 3y\mathrm{e}^{-x} & -3\mathrm{e}^{-x} \\ 3\mathrm{e}^{-y} & -3x\mathrm{e}^{-y} - 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom $(-1 - \lambda)^2 + 9$ hat die Nullstellen $-1 \pm 3\mathrm{i}$.

Diese beiden Eigenwerte haben negativen Realteil. Damit ist $(0, 0)$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

4. Aufgabe

7 Punkte

Das Integral lässt sich als eine Faltung auffassen:

$$(f * f)(t) = t^3 \mathrm{e}^{2t}.$$

Wenn f eine Laplacetransformierte besitzt, dann ist mit $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$:

$$\begin{aligned}
[F(s)]^2 &= \mathcal{L}[6t^3\mathrm{e}^{2t}](s) \\
&= \mathcal{L}[6t^3](s-2) \\
&= \frac{36}{(s-2)^4} \\
F(s) &= \frac{6}{(s-2)^2} \\
f(t) &= 6t\mathrm{e}^{2t}.
\end{aligned}$$

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Wahr.
DGL wird zur Identität, der Anfangswert wird richtig getroffen.
Die rechte Seite ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar. Damit ist die vorgegebene Lösung nach dem EES die einzige.

b) Falsch.
Die gegebene DGL ist inhomogen.

c) Falsch.
Die Sprungfunktion $u_\tau(t)$ ist unstetig, besitzt aber eine Laplacetransformierte.

d) Falsch.
Das ist nur ein *Ansatz*, mit dem man durch Superposition sehr viele Lösungen gewinnen kann. Aber man bekommt damit beispielsweise nicht die Lösung $u(x, y) = x^2 - y^2$.

Diese einfache Lösung findet man durch einen anderen Ansatz, nämlich $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$; hier ist $R(r) = r^2$, $\Phi(\varphi) = \cos 2\varphi$.