Musterlösung Rechenteil — DGL, 09. April 2008

1. Aufgabe

10 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies (-1-\lambda)[\lambda(\lambda-2)+1] = -(\lambda+1)[\lambda^2-2\lambda+1] = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. $\boxed{\textbf{2 P.}}$

Eigenraum zum Eigenwert -1 ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. $\boxed{\textbf{2 P.}}$

Eigenraum zum Eigenwert 1 ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. $\boxed{\textbf{1 P.}}$

Dieser Eigenraum besitzt nur Dimension 1, folglich ist ein Hauptvektor h zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist z.B.

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

(*plus einem reellen Vielfachen des Eigenvektors*).

Damit können wir die allgemeine Lösung anschreiben:

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + C_3 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Für $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ folgt aus der DGL

$$\begin{aligned} (s^2Y(s) - s) - 2(sY(s) - 1) + Y(s) &= 2\mathrm{e}^{-s} \\ (s^2 - 2s + 1)Y(s) - s + 2 &= 2\mathrm{e}^{-s} \quad \boxed{\textbf{3 P.}} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2\mathrm{e}^{-s}}{(s^2 - 2s + 1)} + \frac{s-2}{(s^2 - 2s + 1)} \\ &= \mathrm{e}^{-s}\frac{2}{(s-1)^2} + \frac{s-2}{(s-1)^2} \\ &= \mathrm{e}^{-s}\frac{2}{(s-1)^2} + \frac{(s-1)-1}{(s-1)^2} \\ &= \mathrm{e}^{-s}\frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} \quad \boxed{\textbf{2 P.}} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-s}\frac{2}{(s-1)^2} &= \mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}\left[2t\mathrm{e}^{t}\right] = \mathcal{L}\left[2(t-1)\mathrm{e}^{t-1}u_1(t)\right] \quad \boxed{\textbf{2 P.}} \\ \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} &= \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{t} - t\mathrm{e}^{t}\right]. \quad \boxed{\textbf{2 P.}} \end{aligned}$$

Somit hat man für $y(t)$

$$y(t) = \mathrm{e}^{t} - t\mathrm{e}^{t} + 2(t-1)\mathrm{e}^{t-1}u_1(t) \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

$$\begin{aligned} u_{xx} - \frac{1}{2}u_t &= 0 \quad (0 \le x \le \pi) \\ u(0,t) &= 0, \\ u(\pi,t) &= 0, \\ u_t(x,0) &= 8\sin 2x \quad (0 \le x \le \pi). \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t) \implies 2X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \implies \frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$.
Die linke Seite ist nur von t abhängig, und die rechte nur von x, also sind die beiden Seiten konstant $(= -\lambda)$. Das liefert die folgenden DGLn:

$$\begin{aligned} T'(t) &= -2\lambda T(t), \\ X''(x) &= -\lambda X(x),\ X(0) = X(\pi) = 0. \quad \boxed{\textbf{2 P.}} \end{aligned}$$

Für $T(t)$ bekommen wir

$$T(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2\lambda t}. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Nun die Fallunterscheidungen für mögliche Werte von λ:

a) $\lambda < 0:\ X(x) = c_2\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + c_3\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = c_3 = 0 \implies X(x) = 0.$ $\boxed{\textbf{1 P.}}$

b) $\lambda = 0:\ X(x) = c_2 x + c_0$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = c_3 = 0 \implies X(x) = 0.$ $\boxed{\textbf{1 P.}}$

c) $\lambda = k^2 > 0:\ X(x) = c_2\cos kx + c_3 \sin kx, X(0) = 0 \implies c_2 = 0.$

$X(\pi) = c_3 \sin k\pi = 0 \implies c_3 = 0$ oder $k = n,\ n \in \mathbb{N}, n > 0.$ $\boxed{\textbf{2 P.}}$

Also haben wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung

$$u_n(x,t) = a_n \mathrm{e}^{-2n^2 t} \sin nx,$$

und mit Superposition erhalten wir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-2n^2 t} \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-2n^2 t} \sin nx. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Jetzt müssen wir die Koeffizienten a_n so wählen, dass diese Lösung die Anfangsbedingung erfüllt:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-2n^2 a_n) \sin nx. = 8 \sin 2x \quad (0 \le x \le \pi),$$

Damit folgt

$$a_2 = -1 \quad \text{und} \quad a_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}.$$

Mit diesen Koeffizienten bekommen wir die Lösung des AWPs:

$$u(x,t) = -\mathrm{e}^{-8t} \sin 2x. \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Mit $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ist

$$\Delta(1) = 0, \quad \Delta x = \Delta y = 0,$$
$$\Delta(x^2 - y^2) = 2 - 2 = 0, \quad \Delta(xy) = 0. \quad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

b) Die Superposition der fünf Funktionen ist

$$u(x,y) = A + Bx + Cy + D(x^2 - y^2) + Exy, \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

wobei die Konstanten A, B, C, D und E durch die Randbedingungen bestimmt werden:

$$u(0,y) = A + Cy - Dy^2 \overset{!}{=} -y^2 \implies A = 0, \quad C = 0, \quad D = 1;$$
$$u(x,0) = Bx + Dx^2 \overset{!}{=} x^2 \implies B = 0, \quad D = 1;$$

auf der Hypotenuse von $\mathcal{D}$:

$$u(x, 1-x) = A + Bx + C(1-x) + D(x^2 - (1-x)^2) + Ex(1-x)$$
$$= 2x - 1 + Ex(1-x) = -Ex^2 + (E+2)x - 1 \overset{!}{=} 2x^2 - 1 \implies E = -2.$$

$$\boxed{\textbf{5 P.}}$$

Damit ist

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$