Musterlösung Verständnisteil — DGL, 09. April 2008

1. Aufgabe

9 Punkte

3 freie Parameter C_1, C_2 und C_3 in allgemeiner Lösung: $n = 3$. $\boxed{\textbf{1 P.}}$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind -1 doppelt, 2 einfach. also ist $(\lambda+1)^2(\lambda-2)$ das charakteristische Polynom. $\boxed{\textbf{3 P.}}$,

Mit $(\lambda+1)^2(\lambda-2) = (\lambda^2+2\lambda+1)(\lambda-2) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$
ist $a_2 = 0$, $a_1 = -3$, $a_0 = -2$. $\boxed{\textbf{3 P.}}$,

Die Inhomogenität $f(x)$ ergibt sich durch Einsetzen der speziellen Lösung e^x:

$$y''' - 3y' - 2y = \mathrm{e}^x(1-3-2) = -4\mathrm{e}^x,$$

also $f(x) = -4\mathrm{e}^x$. $\boxed{\textbf{2 P.}}$,

2. Aufgabe

6 Punkte

$$u_{xx} - u_{yy} = x \implies X'' - Y'' = x \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

$$\implies X'' - x = Y'' =: \lambda \implies X'' = x + \lambda, \qquad Y'' = \lambda \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

$$\implies X(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{\lambda}{2}x^2 + Ax + B \text{ und } Y(y) = \frac{\lambda}{2}y^2 + Cy + D \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

$$\implies u(x,y) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{\lambda}{2}(x^2+y^2) + Ax + Cy + E \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Gleichgewichtspunkte (x^*, y^*) erfüllen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(x^* - 1)(y^* - 3) &= 0,\\ (x^* - 2)(y^* - 2) &= 0. \qquad \boxed{\textbf{2 P.}}\end{aligned}$$

Mit etwas „Kombinatorik“ ergeben sich $(1, 2)$ und $(2, 3)$ als die beiden Lösungen für (x^*, y^*). $\boxed{\textbf{2 P.}}$

Die Jacobi-Matrix lautet allgemein

$$\begin{pmatrix} y-3 & x-1 \\ y-2 & x-2 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

Beim GGP $(1, 2)$ ergibt sich die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

welche als Diagonalmatrix den (doppelten) Eigenwert -1 hat. Da er negativen Realteil hat, ist $(1, 2)$ asymptotisch stabil. $\boxed{\textbf{2 P.}}$

Beim GGP $(2, 3)$ hat die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 1$ und damit die (einfachen) Eigenwerte 1 und -1. Einer von ihnen hat positiven Realteil, damit ist $(2, 3)$ instabil. $\boxed{\textbf{2 P.}}$

4. Aufgabe

7 Punkte

Das Integral lässt sich als eine Faltung auffassen:

$$(f'' * f)(t) = 6t^3. \qquad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

Als stetige Funktion besitzt f eine Laplacetransformierte; mit $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$ ist dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f''] \cdot \mathcal{L}[f] &= 6\mathcal{L}[t^3](s) \qquad \boxed{\textbf{1 P.}} \\
s^2F(s) \cdot F(s) &= \frac{36}{s^4} \qquad \boxed{\textbf{1 P.}} \\
[sF(s)]^2 &= \frac{36}{s^4} \\
sF(s) &= \pm\frac{6}{s^2} \\
F(s) &= \pm\frac{6}{s^3} \\
f(t) &= \pm 3t^2. \qquad \boxed{\textbf{3 P.}}
\end{aligned}$$

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Falsch.
Mit xe^x muss auch e^x eine Lösung der DGL sein. Dann haben wir aber drei linear unabhängige Lösungen der DGL, die nur von 2. Ordnung ist.

b) Falsch.
Aus der linearen Unabhängigkeit folgt lediglich, dass es wenigstens eine Stelle t_0 gibt, an der die Wronskideterminante von 0 verschieden ist.

c) Falsch.
Das widerspricht dem Satz von Lerch.

d) Wahr.
Diese drei Polynome haben alle unterschiedlichen Grad und sind damit linear unabhängig.