1. Aufgabe (11 Punkte)

Bestimmen Sie zu den folgenden Differentialgleichungen zunächst die allgemeine Lösung und lösen Sie dann das Anfangswertproblem.

a) $y' = 3x^2y^2,\ y \neq 0; \qquad y(1) = \frac{1}{2}.$

b) $y' = \frac{2}{x}y + 1,\ x > 0; \qquad y(1) = 0.$

Lösung:

a) $\frac{y'}{y^2} = 3x^2\ \boxed{1 \text{ Pkt}} \quad \Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 3x^2\,dx \ \Rightarrow\ -\frac{1}{y} = x^3 + c\,\boxed{1 \text{ Pkt}}$

$\Rightarrow\ y(x) = -\frac{1}{x^3+c}$ ist die allgemeine Lösung. $\boxed{1 \text{ Pkt}}$

$y(1) = \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{1+c} = \frac{1}{2}\,\boxed{1 \text{ Pkt}} \quad \Leftrightarrow\ c = -3.$

$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x^3-3}$ löst das AWP. $\boxed{1 \text{ Pkt}}$

b) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$y_h(x) = ce^{\int \frac{2}{x}\,dx} = ce^{2\ln x}\,\boxed{1 \text{ Pkt}} \ = cx^2.\,\boxed{1 \text{ Pkt}}$

Variation der Konstanten:

$y(x) = c(x)x^2 \ \Rightarrow\ y'(x) = c'(x)x^2 + 2c(x)x.\,\boxed{1 \text{ Pkt}}$

Einsetzen:

$c'(x)x^2 + 2c(x)x = 2c(x)x + 1 \ \Rightarrow\ c'(x) = \frac{1}{x^2}\,\boxed{1 \text{ Pkt}} \ \Rightarrow\ c(x) = -\frac{1}{x} + k$

$\Rightarrow y(x) = c(x)x^2 = -x + kx^2$ ist die allgemeine Lösung. $\boxed{1 \text{ Pkt}}$

$y(1) = 0\ \Leftrightarrow\ k = 1.$ Lösung des AWP ist $y(x) = -x + x^2.\,\boxed{1 \text{ Pkt}}$

2. Aufgabe (9 Punkte)

Berechnen Sie ein reelles Fundamentalsystem für das lineare DGL-System

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an.

Lösung:

Eigenwerte der Matrix bestimmen:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 9 = 0 \;\boxed{\text{1 Pkt}} \quad \Leftrightarrow \; \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i. \;\boxed{\text{1 Pkt}}$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1 + 3i$:

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \,\boxed{\text{1 Pkt}} \quad \Leftrightarrow \; v_1 = iv_2 \;\Leftarrow\; \vec{v} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}. \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Komplexe Lösung:

$$\vec{y}_k(x) = e^{\lambda_1 x}\vec{v} = e^{(1+3i)x} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \;\boxed{\text{1 Pkt}} \; = e^x(\cos 3x + i \sin 3x) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \;\boxed{\text{1 Pkt}}$$

Reelles Fundamentalsystem:

$$\vec{y}_1(x) = \operatorname{Re} \vec{y}_k(x) = e^x \begin{pmatrix} -\sin 3x \\ \cos 3x \end{pmatrix} \;\boxed{\text{1 Pkt}}\,, \quad \vec{y}_2(x) = \operatorname{Im} \vec{y}_k(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} \boxed{\text{1 Pkt}}$$

.

Allgemeine reelle Lösung:

$$\vec{y}(x) = c_1\vec{y}_1(x) + c_2\vec{y}_2(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} -\sin 3x \\ \cos 3x \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix}. \boxed{\text{1 Pkt}}$$

3. Aufgabe (9 Punkte)

Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen des nicht-linearen DGL-Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(y-2) \\ \dot{y} &= (x+1)(1-y) \end{aligned}$$

Welche Gleichgewichtslösungen sind asymptotisch stabil? Welche sind instabil?

Lösung:

1. Gleichung: $x(y-2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \vee y = 2$.

2. Gleichung: $(x+1)(1-y) = 0 \;\Rightarrow\; x = -1 \vee y = 1$.

Gleichgewichtslösungen sind also

$(x_1, y_1) = (0, 1)$ $\boxed{\text{1 Pkt}}$ und $(x_2, y_2) = (-1, 2)$. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

Diese und **nur diese** GGL bestimmt: $\boxed{\text{1 Pkt}}$

Funktionalmatrix: $\vec{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} y-2 & x \\ 1-y & -(x+1) \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

$\vec{F}'(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = -1 < 0$, $\boxed{\text{1 Pkt}}$

also ist die GGL $(0,1)$ asymptotisch stabil. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

$\vec{F}'(-1,2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **Beide** Punkte richtig eingesetzt: $\boxed{\text{1 Pkt}}$

Eigenwerte bestimmen:

$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm 1.$ $\boxed{\text{1 Pkt}}$

$\lambda_1 = 1 > 0 \;\Rightarrow\;$ die GGL $(-1, 2)$ ist instabil. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

4. Aufgabe (11 Punkte)

Betrachtet wird das folgende Eigenwertproblem:

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y(\tfrac{\pi}{2}) = 0\,.$$

a) Geben Sie für $\lambda < 0$, für $\lambda = 0$ und für $\lambda > 0$ jeweils die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung $y'' + \lambda y = 0$ an.

b) Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist.

c) Finden Sie alle positiven Eigenwerte λ sowie jeweils eine zugehörige Eigenfunktion.

Lösung:

a) $\lambda < 0: \quad y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ $\boxed{\text{1 Pkt}}$

$\lambda = 0: \quad y(x) = c_1 x + c_2$ $\boxed{\text{1 Pkt}}$

$\lambda > 0: \quad y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$ $\boxed{\text{1 Pkt}}$

b) Für $\lambda = 0$ hat man $y(x) = c_1 x + c_2$ und $y'(x) = c_1$.

$y'(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; c_1 = 0$. Also hat man $y(x) = c_2$. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

$y(\frac{\pi}{2}) = 0 \;\Leftrightarrow\; c_2 = 0$. Also folgt $y(x) = 0$.

Da das RWP nur die triviale Lösung hat ist $\lambda = 0$ kein EW. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

c) Für $\lambda > 0$ hat man $y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

und $y'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

$y'(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; c_2\sqrt{\lambda} = 0 \Leftrightarrow\; c_2 = 0$. Also folgt $y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x$. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

$y(\frac{\pi}{2}) = 0 \;\Leftrightarrow\; c_1 \cos\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = 0$

Man erhält nicht-triviale Lösungen, falls $\cos\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = 0$, $\boxed{\text{1 Pkt}}$

also wenn $\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist,

d.h. $\sqrt{\lambda}$ eine ungerade natürliche Zahl. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

Die positiven Eigenwerte sind also $\lambda_k = (2k+1)^2,\ k \in \mathbb{N}_0$, $\boxed{\text{1 Pkt}}$

zugehörige Eigenfunktionen $y_k(x) = \cos(2k+1)x$. $\boxed{\text{1 Pkt}}$