Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 07
Penn-Karras 25. Juli 2007

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 7 Punkte

Die lineare Dgl.

$$y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit konstanten, reellen Koeffizienten a_0, a_1, a_2 habe die Lösungen

$$e^{3t}, \quad e^{-t}\sin t.$$

a) Welche Nullstellen hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \ ?$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung obiger Dgl.

2. Aufgabe 9 Punkte

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{x}} = A_\alpha \vec{x}$$

mit

$$A_\alpha \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für welche α ist die Gleichgewichtslösung $\vec{x}(t) = 0$ stabil, bzw. asymptotisch stabil?

3. Aufgabe 9 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?
Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

Es gibt **3 Punkte** für jeden Teil.
Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.

a) Sei $\vec{x}_s \in \mathbb{R}^n$ ein stationärer Punkt des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}).$$

Die Jacobi-Matrix $DF(\vec{x}_s)$ habe einen Eigenwert mit negativem Realteil. Dann ist $\vec{x}_s$ stabiler stationärer Punkt.

b) Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

Sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ ein Vektor, so dass $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$ eine Lösung des System ist. Dann ist ein 0 Eigenwert der Matrix A und $\vec{x}_0$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 0.

c) Seien $x_1(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x'' + 3x' + x = \sin t \tag{1}$$

und $x_2(t)$ eine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung. Dann ist $x_1(t) + x_2(t)$ auch eine Lösung von (1).

4. Aufgabe

5 Punkte

Es sei $y : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t} \sin t, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Bestimmen Sie die Laplacetansformierte von y. Die Rücktransformation, d.h die Bestimmung von y selbst, ist nicht erforderlich.

5. Aufgabe

10 Punkte

Sei

$$u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t) \cos x \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass u das Anfangswertproblem für die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u(x,0) = 0.$$

löst.