1. Aufgabe (7 Punkte) a) Da e^{3t} und

$$e^{-t}\sin t = e^{-t}\ \mathrm{Im}\ e^{it} = \mathrm{Im}\ e^{(-1+i)t}$$

Lösungen der Dgl. sind, müssen 3 und $-1+i$ Nullstellen von P sein. [1]
$\boxed{1\text{ Pkt}}$ $\boxed{1\text{ Pkt}}$ $\boxed{1\text{ Pkt}}$

Da die Koeffizienten des Polynoms reell sind, ist auch $\overline{-1+i} = -1-i$ Nullstelle von P. $\boxed{1\text{ Pkt}}$

Insgesamt hat P die Nullstellen $3, -1+i, -1-i$. $\boxed{1\text{ Pkt}}$

b) Komplexes Fundamentalsystem ist $e^{3t}, e^{(-1+i)t}, e^{(-1-i)t}$. $\boxed{1\text{ Pkt}}$
Allgemeine Lösung:

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{(-1+i)t} + c_3 e^{(-1-i)t}, \quad c_1, c_2, c_3 \text{ Konstanten}\ . \boxed{1\text{ Pkt}}$$

---

oder reelles Fundamentalsystem

$$e^{3t}, \quad \mathrm{Re}\{e^{(-1+i)t}\} = e^{-t}\cos t, \quad \mathrm{Im}\{e^{(-1+i)t}\} = e^{-t}\sin t. \boxed{1\text{ Pkt}}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}\cos t + C_3 e^{-t}\sin t, \quad C_1, C_2, C_3 \text{ Konstanten}\ . \boxed{1\text{ Pkt}}$$

---

[1] Es gilt

$$\mathrm{Im}\ \{P(-1+i)e^{(-1+i)t}\} = \mathrm{Im}\ \{(e^{(-1+i)t})''' + a_2(e^{(-1+i)t})'' + a_1(e^{(-1+i)t})' + a_0 e^{(-1+i)t}\}$$

$$= (e^{-t}\sin t)''' + a_2(e^{-t}\sin t)'' + a_1(e^{-t}\sin t)' + a_0 e^{-t}\sin t = 0$$

für alle t, daher $P(-1+i) = 0$.
(Diese Begründung braucht nicht von den Studenten in der Klausur gegeben werden)

2. Aufgabe (9 Punkte)

Eigenwerte der Matrix bestimmen:

$$\det(A_\alpha - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 0 \\ 2 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}(-1-\lambda)$$

$$= (\alpha-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0 \ \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Wir erhalten die EW

$\lambda_1 = \alpha$ doppelter EW, $\quad \lambda_2 = -1$, insbesondere Re $\lambda_1 = \alpha$, Im $\lambda_2 = -1$. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

Die Gleichgewichtslösung $\vec{x} = \vec{0}$ ist **instabil**, falls $\alpha > 0$. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

Sie ist **asymptotisch stabil** (damit auch stabil), falls $\alpha < 0$. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

Sei nun $\alpha = 0$.
Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$:

$$A_0\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{v} = 0 \ \boxed{\text{1 Pkt}} \quad \Leftrightarrow \ v_1 = v_2 = 0. \ \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Wir erhalten einen EV

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

der den Eigenraum aufspannt. $\boxed{\text{1 Pkt}}$ Die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 0$ ist also 1, während die algebraische Vielfachheit 2 ist ($\lambda_1 = 0$ ist doppelter EW). $\boxed{\text{1 Pkt}}$ Daher ist die Gleichgewichtslösung **instabil** (damit auch nicht asymptotisch stabil). $\boxed{\text{1 Pkt}}$

3. Aufgabe (9 Punkte)

a) **Falsch!** Es ist hier nicht ausgeschlossen, dass $DF(\vec{x}_s)$ einen EW mit positivem Realteil hat. Dann ist $\vec{x}_s$ instabil.

b) **Richtig!** Mit $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$ gilt

$$\vec{0} = \vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) = A\vec{x}_0,$$

also $A\vec{x}_0 = \vec{0} = 0\vec{x}_0$. Wg. $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ ist $\vec{x}_0$ somit Eigenvektor zum Eigenwert 0.

c) **Richtig!** Die Summe $x_1(t)+x_2(t)$ aus einer Lösung $x_1(t)$ der inhomogenen Dgl. (1) und einer Lösung $x_2(t)$ der homogenen Dgl. ist wieder Lösung der inhomogenen Dgl.

4. Aufgabe (5 Punkte) Mit dem Dämpfugssatz folgt

$$\mathcal{L}[y''+3y'+2y](s) = \mathcal{L}[e^{-t}\sin t](s) = \mathcal{L}[\sin t](s+1) \boxed{\text{1 Pkt}} = \frac{1}{(s+1)^2+1} \boxed{\text{1 Pkt}}.$$

Nach dem Differentiationssatz gilt

$$\frac{1}{(s+1)^2+1} = \mathcal{L}[y''+3y'+2y](s) = \mathcal{L}[y''](s) + 3\mathcal{L}[y'](s) + 2\mathcal{L}[y](s)$$

$$= s^2\mathcal{L}[y](s) - y'(0) - sy(0) + 3[s\mathcal{L}[y](s) - y(0)] + 2\mathcal{L}[y](s) \boxed{\text{1 Pkt}}$$
$$= (s^2+3s+2)\mathcal{L}[y](s) - y'(0) - (s+3)y(0),$$

mit den AB ergibt sich

$$(s^2+3s+2)\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} + s + 5. \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Für die Laplace-Transformierte ergibt sich

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s^2+3s+2)[(s+1)^2+1]} + \frac{s+5}{s^2+3s+2}. \boxed{\text{1 Pkt}}$$

5. Aufgabe (10 Punkte) Es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = f'(t)\cos x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = f''(t)\cos x. \boxed{\text{1 Pkt}}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(t)\cos'' x = -f(t)\cos x. \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Einsetzen in die part. Diffgl. ergibt

$$f''(t)\cos x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \cos x = (1 - f(t))\cos x. \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Daraus erhalten wir für f die Dgl.

$$f''(t) + f(t) = 1. \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$f(0) = 0, \boxed{\text{1 Pkt}}\ f'(0) = 0 \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. lautet

$$f_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad C_1, C_2 \text{ Konstanten }. \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. ist $f_s(t) = 1$. $\boxed{\text{1 Pkt}}$ Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. lautet somit

$$f(t) = 1 + C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad C_1, C_2 \text{ Konstanten }. \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Bestimmung von C_1, C_2 durch AB ergibt als Lösung des AWP

$$f(t) = 1 - \cos t. \boxed{\text{1 Pkt}}$$