1. Aufgabe (7 Punkte)

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der trennbaren Differentialgleichung

$$y' = y^2 \sin x\,, \quad y \neq 0\,.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 \sin x\,, \quad y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1\,,$$

und geben Sie ein möglichst großes Intervall an, auf dem die Lösung definiert ist.

Lösung:

a) Variablentrennung:
$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \sin x\,dx$ $\boxed{1 \text{ Pkt}}$ $\Rightarrow$ $\frac{-1}{y} = -\cos x + c$ $\boxed{1 \text{ Pkt}}$ $\Rightarrow$ $y(x) = \frac{1}{\cos x - c}$ $\boxed{1 \text{ Pkt}}$

b) Bestimmung von c:
$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{-c} = 1$ $\boxed{1 \text{ Pkt}}$ $\Rightarrow$ $c = -1$ $\Rightarrow$ $y(x) = \frac{1}{\cos x + 1}$ $\boxed{1 \text{ Pkt}}$
Im Lösungsintervall I muss gelten $\cos x \neq -1$, und es ist $\frac{\pi}{2} \in I$. $\boxed{1 \text{ Pkt}}$
Das größtmögliche Intervall ist deshalb $I =]-\pi, \pi[$. $\boxed{1 \text{ Pkt}}$

4. Aufgabe (8 Punkte)
Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem für die Funktion $y(t)$ mittels Laplace-Transformation:

$$y'' + 2y' + y = 12te^{-t}\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = -1\,.$$

Lösung:
Mit $Y = \mathcal{L}[y]$ erhält man

$$\underbrace{s^2Y - s + 1}_{\boxed{1 \text{ Pkt}}} + 2\underbrace{(sY - 1)}_{\boxed{1 \text{ Pkt}}} + Y = \underbrace{\frac{12}{(s+1)^2}}_{\boxed{1 \text{ Pkt}}} \Rightarrow (s^2 + 2s + 1)Y = \frac{12}{(s+1)^2} + (s+1) \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\frac{12}{(s+1)^2} + (s+1)}{s^2 + 2s + 1} \boxed{1 \text{ Pkt}} = \frac{\frac{12}{(s+1)^2} + (s+1)}{(s+1)^2} = \frac{12}{(s+1)^4} + \frac{1}{s+1} \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

Rücktransformation ergibt

$$y(t) = \underbrace{2t^3e^{-t}}_{\boxed{1 \text{ Pkt}}} + \underbrace{e^{-t}}_{\boxed{1 \text{ Pkt}}}$$

2. Aufgabe (13 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- Eigenwerte bestimmen:

  $$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda) + 2 = \lambda^2 - \lambda = 0 \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

  $$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

- Eigenvektoren und Fundamentallösungen bestimmen:

  $$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{z.B. } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}} \qquad \Rightarrow \vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

  $$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{z.B. } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}} \qquad \Rightarrow \vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

- allg. Lsg. der homog. Gleichung:

  $$y_h(t) = c_1\vec{y}_1(t) + c_2\vec{y}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

- Bestimmung einer Partikulärlösung:

  1. Variante Variation der Konstanten

  $$\vec{c}(t) = \int \Big(\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t)\Big)^{-1} \cdot \vec{b}(t)\, dt = \int \begin{pmatrix} 2 & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} dt \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

  $$= \int \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} dt \boxed{1 \text{ Pkt}} = \int \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^t \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

  $$\Rightarrow \vec{y}_p(t) = e^{2t}\vec{y}_1(t) - 2e^t\vec{y}_2(t) \boxed{1 \text{ Pkt}} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e^t \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

  2. Variante Ansatz vom Typ der rechten Seite

  $$\vec{y}_p(t) = e^{2t}\vec{v} \boxed{1 \text{ Pkt}} \quad \Rightarrow \vec{y}_p\,'(t) = 2e^{2t}\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} e^{2t}\vec{v} + \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

  $$\Rightarrow 2\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

  $$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  $$\Rightarrow \vec{y}_p(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

- allgemeine Lösung

  $$\vec{y}(t) = \vec{y}_p(t) + \vec{y}_h(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

3. Aufgabe (12 Punkte)

a) Wandeln Sie die nicht-lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} = (x-2)(x+\dot{x})$$

für die Funktion $x(t)$ in ein zweidimensionales System für $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$ um.

b) Berechnen Sie alle Gleichgewichtslösungen des Systems aus Teil a).
Welche Gleichgewichtslösungen sind asymptotisch stabil? Welche sind instabil?

Lösung:

a) $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ (x_1-2)(x_1+x_2) \end{pmatrix} \boxed{1\text{ Pkt}}$

b) Für GGL muss gelten $\dot{\vec{x}} = \vec{0}$, d.h. $x_2 = 0$ und $(x_1-2)(x_1+x_2) = 0.$ $\boxed{1\text{ Pkt}}$

GGL sind also $(2,0)$ und $(0,0)$ $\boxed{1\text{ Pkt}}$

$\vec{F}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x_1+x_2-2 & x_1-2 \end{pmatrix} \boxed{1\text{ Pkt}}$

$\vec{F}'(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\det\left(\vec{F}'(2,0) - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} \boxed{1\text{ Pkt}} = \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} \boxed{1\text{ Pkt}}$

Da $\vec{F}'(2,0)$ einen positiven Eigenwert hat $\boxed{1\text{ Pkt}}$ ist die GGL $(2,0)$ instabil. $\boxed{1\text{ Pkt}}$

$\vec{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$\det\left(\vec{F}'(0,0) - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \boxed{1\text{ Pkt}} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i \boxed{1\text{ Pkt}}$

Da $\vec{F}'(2,0)$ nur Eigenwerte mit negativem Realteil hat $\boxed{1\text{ Pkt}}$ ist die GGL $(0,0)$ asymptotisch stabil. $\boxed{1\text{ Pkt}}$