1. Aufgabe (8 Punkte) a) Da $1 = e^{0t}$ und

$$e^{-t}\sin(2t) = e^{-t}\ \text{Im}\ e^{(2it)} = \text{Im}\ e^{(-1+2i)t}$$

Lösungen der Dgl. sind, müssen 0 und $-1+2i$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms P sein. $\boxed{\text{1 Pkt}}$ $\boxed{\text{1 Pkt}}$

Da die Koeffizienten des Polynoms reell sind, ist auch $\overline{-1+2i} = -1-2i$ Nullstelle von P. $\boxed{\text{1 Pkt}}$

Insgesamt hat P die Nullstellen $0, -1+2i, -1-2i$, also setze

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda+1-2i)(\lambda+1+2i) = \lambda[(\lambda+1)^2+4] = \lambda^3+2\lambda^2+5\lambda.$$

$\boxed{\text{1 Pkt}}$ $\boxed{\text{1 Pkt}}$ $\boxed{\text{1 Pkt}}$

Dies entspricht der Dgl.

$$y'''(t) + 2y''(t) + 5y'(t) = 0. \boxed{\text{1 Pkt}}\ \boxed{\text{1 Pkt}}$$

2. Aufgabe (10 Punkte) Eigenwerte der Matrix A_α bestimmen:

$$\det(A_\alpha - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \alpha & -\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \alpha & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)(\lambda^2 - \alpha) = 0 \;\boxed{1 \text{ Pkt}}$$

Wir erhalten die EW

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha}. \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

<u>**1.Fall** $\alpha > 0$**:**</u> Dann gilt Re $\lambda_2 = \lambda_2 = \sqrt{\alpha} > 0$. Die Gleichgewichtslösung $\vec{x} = \vec{0}$ ist **instabil** (damit auch nicht asymptotisch stabil). $\boxed{1 \text{ Pkt}}$

<u>**2.Fall** $\alpha < 0$**:**</u> Dann gilt

$$\text{Re } \lambda_1 = \lambda_1 = -3 < 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{|\alpha|} \text{ insbesondere Re } \lambda_{2,3} = 0 \boxed{1 \text{ Pkt}}$$

und die algebraische Vielfachheit von $\lambda_{2,3}$ ist 1, damit gleich der geometrischen Vielfachheit. $\boxed{1 \text{ Pkt}}$ Die Gleichgewichtslösung $\vec{x} = \vec{0}$ ist **stabil, aber nicht asymptotisch stabil**. $\boxed{1 \text{ Pkt}}$

<u>**3.Fall** $\alpha = 0$**:**</u> Dann ist $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ doppelter EW, d.h. die algebraische Vielfachheit von λ_2 ist 2 . $\boxed{1 \text{ Pkt}}$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$:

$$A_0\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{v} = 0 \boxed{1 \text{ Pkt}} \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = v_3 = 0.$$

Wir erhalten einen EV

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

der den Eigenraum aufspannt. $\boxed{1 \text{ Pkt}}$ Die geometrische Vielfachheit von $\lambda_2 = 0$ ist also 1, während die algebraische Vielfachheit 2 ist. Daher ist die Gleichgewichtslösung **instabil**. $\boxed{1 \text{ Pkt}}$

3. Aufgabe (9 Punkte)

a) **Richtig!** $DF(\vec{x}_s) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ hat dann nur die drei EW $-3 \pm i, -1$. Diese haben alle negativen Realteil. Daher ist $\vec{x}_s$ (asymptotisch) stabil.

b) **Richtig!** Es gilt

$$\vec{y}\,'(t) = e^{-3t}\vec{x}\,'(t) - 3e^{-3t}\vec{x}(t) = e^{-3t}A\vec{x}(t) - 3e^{-3t}\vec{x}(t) = e^{-3t}(A-3E)\vec{x}(t) = (A-3E)\vec{y}(t).$$

c) **Falsch!** Wähle z.B. $u(t) = v(t) = 1$. Dann gilt

$$\mathcal{L}[u](s) = \mathcal{L}[v](s) = \mathcal{L}[uv](s) = \mathcal{L}[1](s) = 1/s,$$

aber

$$\mathcal{L}[u](s)\mathcal{L}[v](s) = 1/s^2 \neq 1/s = \mathcal{L}[uv](s).$$

4. Aufgabe (10 Punkte) Mit dem Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = X(x)T'(t) \boxed{\text{1 Pkt}}$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = X'(x)T(t). \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Einsetzen in die part. Diffgl. ergibt

$$X(x)T'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = (\cos t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = (\cos t)X'(x)T(t). \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Damit gilt

$$\frac{T'(t)}{T(t)\cos t} = \frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda \text{ Konstante }. \boxed{\text{1 Pkt}} \; \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Daraus erhalten wir für X, T die Dgln.

$$T'(t) = \lambda T(t)\cos t \text{ und } X'(x) = \lambda X(x). \boxed{\text{1 Pkt}}$$

Die allgemeine Lösung dieser Dgln. lautet

$$T(t) = C_1 \exp\left(\int \lambda \cos t dt\right) = C_2 e^{\lambda \sin t}, \quad X(x) = C_3 e^{\lambda x}$$

mit Konstanten C_2, C_3. $\boxed{\text{1 Pkt}}$ $\boxed{\text{1 Pkt}}$ Insgesamt ergibt sich

$$u(x,t) = X(x)T(t) = C_3 e^{\lambda x} C_2 e^{\lambda \sin t} = K e^{\lambda[x+\sin t]} \boxed{\text{1 Pkt}} \; \boxed{\text{1 Pkt}}$$

mit neuer Konstanten K.