Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 08/09

Doz.: StR.i.H. A. Gündel-vom Hofe Ass.: A.-K. Schlegel 18. 02. 2009

Februar – Klausur (Rechenteil)
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$ty'' - (1+3t)y' + 3y = 0 \quad (*)$$

a) Zeigen Sie, dass $(*)$ eine Lösung der Form $y_1 = e^{ct}$ mit geeigneter Konstante $c \in \mathbb{R}$ besitzt.

b) Finden Sie, indem Sie mittels des Ansatzes $y(t) = v(t)y_1(t)$ zunächst eine homogene DGL 1. Ordnung für $u(t) := v'(t)$ herleiten (Reduktion der Ordnung), die allgemeine Lösung von $(*)$.

2. Aufgabe

11 Punkte

a) Ermitteln Sie ein *reelles* Fundamentalsystem für

$$\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Welche Lösung erfüllt die Anfangsbedingung $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Hinweis zu a): Zeigen Sie zunächst, dass $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3-i \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

3. Aufgabe

8 Punkte

Finden Sie alle Gleichgewichtslösungen des folgenden Differentialgleichungssystems und untersuchen Sie jede Lösung dahingehend, ob diese jeweils asymptotisch stabil oder instabil ist:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x+y) \\ x + x^3 \end{pmatrix}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei das Randanfangswertproblem

$$(*)\ u_t = u_{xx} + u; \quad \begin{cases} u(x,0) = 1 - x^2, 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = 1,\ u(1,t) = 0,\ t \geq 0. \end{cases}$$

a) Finden Sie eine spezielle stationäre, d.h. von t unabhängige Lösung $u(x,t) = f(x)$ der PDG $(*)$, welche die Randbedingungen $u(0,t) = 1$, $u(1,t) = 0$ erfüllt.

b) Leiten Sie mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ das zu lösende Randeigenwertproblem für die Funktion $X(x)$ im Fall homogener Randwerte her. (Die Lösung des Randeigenwertproblems ist nicht gefragt.)

Hinweis zu a): Die stationäre Lösung erfüllt nicht unbedingt die Anfangsbedingung $u(x,0) = 1 - x^2$.