Musterlösung Rechenteil — DGL, 28. Februar 2009

1. Aufgabe

11 Punkte

a): $y_1 = e^{ct}$ eingesetzt in die DGL $(*)$ ergibt

$$\begin{aligned} & tc^2e^{ct} - c(1+3t)e^{ct} + 3e^{et} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & t(c^2 - 3c) + 3 - c = 0 \\ \underset{\text{Koeffi.-Vgl.}}{\Leftrightarrow} \quad & c = 3 \end{aligned}$$

$y_1 = e^{3t}$ ist eine Lösung von $(*)$.

b):

$$\begin{aligned} y = ve^{3t} \ & \Rightarrow \ y' = v'e^{3t} + 3ve^{3z} \\ & \Rightarrow \ y'' = v''e^{3t} + 6e^{3t}v' + 9ve^{3t}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL $(*)$ ergibt sich

$$v''t + v'(3t-1) = 0.$$

Mit der Substitution $v' =: u$ erhalten wir

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{t} - 3 \ \Rightarrow \ u = cte^{-3t}.$$

Wir setzen $c = 1$ und erhalten

$$v = \int u = \int te^{-3t}dt = -\frac{1}{3}te^{-3t} + \int \frac{1}{3}e^{-3t}dt = (-\frac{1}{3}t - \frac{1}{9})e^{-3t}.$$

Damit erhalten wir die zu y_1 linear unabhängige Lösung

$$y = v\,y_1 = -\frac{1}{3}t - \frac{1}{9}.$$

Als allgemeine Lösung erhalten wir

$$y_{\text{allg.}} = c_1e^{3t} + c_2(1+3t).$$

2. Aufgabe

11 Punkte

a): Mit dem Hinweis erhält man

$$A\begin{pmatrix}-5\\3-i\end{pmatrix}=(1+i)\begin{pmatrix}-5\\3-i\end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren sind komplex konjugiert zueinander und wir erhalten somit die komplexen Lösungen

$$\vec{z}_1=e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}-5\\3-i\end{pmatrix},\ \vec{z}_2=e^{(1-i)t}\begin{pmatrix}-5\\3+i\end{pmatrix}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem erhalten wir, indem wir Real- und Imaginärteil von z_1 bilden.
Es gilt $e(1+i)t=e^t(\cos t+i\sin t)$ und wir erhalten als reelles Fundamentalsystem

$$\vec{x}_1=\operatorname{Re}z_1=e^t\begin{pmatrix}-5\cos t\\3\cos t+\sin t\end{pmatrix},$$
$$\vec{x}_2=\operatorname{Im}z_2=e^t\begin{pmatrix}-5\sin t\\3\sin t-\cos t\end{pmatrix}.$$

b): Die Anfangbedingung liefert folgende Gleichung für die Koeffizienten $c_1,\ c_2$ der allgemeinen Lösung $\vec{x}=c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2$:

$$c_1\vec{x}_1(0)+c_2\vec{x}_2(0)=c_1\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

und wir erhalten als Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{x}=-\frac{1}{5}\,\vec{x}_1-\frac{13}{5}\,\vec{x}_2.$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Für die Gleichgewichtspunkte erhalten wir

$$\vec{0} = \vec{F}(\vec{x}) \;\Leftrightarrow\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi k \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Für die Jacobimatrix erhalten wir

$$J_{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ 1+3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Um das Stabilitätsverhalten zu bestimmen unterscheiden wir nun die Fälle k gerade und k ungerade.
Im Fall
(i) $k = 2n+1$ erhalten wir für die Jacobimatrix $J_{\vec{F}}(0, \pi k) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Sie hat die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

deren Realteile negativ sind.

Folglich sind für $k = 2n+1$ die GGPe asymptotisch stabil.

Im Fall
(ii) $k = 2n$ erhalten wir für die Jacobimatrix $J_{\vec{F}}(0, \pi k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Sie hat die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2},$$

d.h. einen positiven und einen negativen Eigenwert.

Folglich sind für $k = 2n$ die GGPe instabil.

4. Aufgabe

10 Punkte

a): Eine stationäre Lösung $u(x,t) = f(x)$ erfüllt

$$0 = u_{xx} + u,$$

ist also von der Form

$$u = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Über die Randbedingungen erhalten wir für die Koeffizienten $c_1,\ c_2$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} u(0,t) &= c_2 = 1, \\ u(1,t) &= c_1 \sin 1 + c_2 \cos 1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\cot 1 \end{aligned}$$

und damit

$$u(x,t) = -\cot 1\, \sin x + \cos x.$$

b): Mit $u(x,t) = X(x)T(t)$ ergibt sich aus der PDG $(*)$:

$$\dot{T}X = X''T + XT \ \Rightarrow\ \frac{\dot{T}}{T} = \lambda = \frac{X''}{X} + 1$$

und wir erhalten zusammen mit der Bedingung der homogenen Randwerte das folgende Randeigenwertproblem für X:

$$X'' = (\lambda - 1)X; \quad X(0) = 0 = X(1).$$