Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 08/09
Doz.: StR.i.H. A. Gündel-vom Hofe Ass.: A.-K. Schlegel 18. 02. 2009

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 9 Punkte

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des linearen DGL-Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

im Gleichgewichtspunkt $\vec{x} = \vec{0}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

2. Aufgabe 8 Punkte

Finden Sie eine homogene lineare DGL von kleinstmöglicher Ordnung, welche die beiden Lösungen

$$y_1 = e^x \sin x, \;\; y_2 = e^x$$

besitzt, und schreiben Sie diese anschließend in ein DGL-System 1. Ordnung um.

Hinweis: Welche Nullstellen hat das zugehörige reelle charakteristische Polynom?

3. Aufgabe 8 Punkte

Zeigen Sie unter Anwendung der Laplacetransformation, dass für die angegebene Faltung folgendes gilt:

$$te^{-t} * \cos t = -\frac{1}{2}(-\sin t + te^{-t})$$

Hinweise: Verwenden Sie

$$\mathcal{L}\left[\cos(at)\right](s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \;\; \mathcal{L}\left[\sin(at)\right](s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

ohne Beweis und erinnern Sie sich daran, was der Satz von Lerch sagte.

4. Aufgabe 6 Punkte

Seien $\vec{y}_1(x), \;\vec{y}_2(x)$ zwei Lösungen des linearen inhomogenen DGL-Systems

$$\vec{y}\,' = A\,\vec{y} + \vec{b}(x) \quad (*).$$

Leiten Sie eine möglichst allgemeine Bedingung für $\alpha, \;\beta \in \mathbb{R}$ her, so dass die Linearkombination $\vec{y}(x) = \alpha\,\vec{y}_1(x) + \beta\,\vec{y}_2(x)$

(i) eine *homogene* Lösung von $(*)$ darstellt bzw.

(ii) eine weitere *inhomogene Lösung* von $(*)$ ergibt.

5. Aufgabe

9 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Nicht begründete Antworten werden nicht bewertet.

a) Alle Lösungen der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ lassen sich mit dem Separationsansatz bestimmen.

b) Das inhomogene lineare DGL-System

$$\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x} + \vec{b}$$

mit konstanter Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und konstantem Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ besitzt immer mindestens einen Gleichgewichtspunkt.

c) Sind $y_1,\ y_2$ zwei Lösungen einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung, die in einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in J$ definiert sind, und gilt an der Stelle $t = 0$

$$y_1'(0)y_2(0) - y_1(0)y_2'(0) = \frac{1}{3},$$

dann bilden diese Funktionen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.