Musterlösung Verständnisteil — DGL, 18. Februar 2009

1. Aufgabe

9 Punkte

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte: Es gilt

$$\det(A - \lambda E) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - a)^2(\lambda + 2) = 0$$

(i) Für $a < 0$ sind alle Eigenwerte von A negativ, d.h. das GG ist asymptotisch stabil.

(ii) Für $a > 0$ hat A einen doppelten positiven Eigenwert und das GG ist instabil.

(iii) Für $a = 0$ ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 0$ zu untersuchen. Es gilt

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow \dim(\mathrm{Eig}(0)) = 1.$$

Folglich gilt $a(0) = 2 > 1 = g(0)$ und das GG ist instabil.

2. Aufgabe

8 Punkte

Das zugehörige charakteristische Polynom hat die Nullstellen $\lambda = 1$ und $\lambda = 1 \pm i$. Für die charakteristische Gleichung der DGL ergibt sich damit

$$(\lambda - 1)\left[(\lambda - 1)^2 + 1\right] = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0.$$

Die zugehörige homogene lineare DGL lautet

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0.$$

Als DGL-System 1. Ordnung ergibt sich

$$\vec{x},' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[te^{-t} * \cos t\right](s) &\overset{\text{FS}}{=} \mathcal{L}\left[te^{-t}\right](s)\mathcal{L}\left[\cos t\right](s) \\
&\overset{MS}{=} (-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[e^{-t}\right](s))\mathcal{L}\left[\cos t\right](s) \\
&= (-\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1})\frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}.
\end{aligned}
$$

Andererseits ist

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[-\frac{1}{2}(-\sin t + te^{-t})\right](s) &\overset{MS}{=} -\frac{1}{2}(-\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2}) \\
&= \frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}.
\end{aligned}
$$

Nach dem Satz von Lerch folgt die Gleichheit der Urbilder.

4. Aufgabe

6 Punkte

Für $\vec{y}(x) = \alpha\,\vec{y}_1(x) + \beta\,\vec{y}_2(x)$ gilt

$$
\begin{aligned}
\vec{y}\,' &= \alpha\,\vec{y}_1{}' + \beta\,\vec{y}_2{}' = \alpha(A\vec{y}_1 + \vec{b}) + \beta(A\vec{y}_2 + \vec{b}) \\
&= A\vec{y} + (\alpha+\beta)\vec{b}.
\end{aligned}
$$

Folglich gilt:

(i) $\vec{y}(x) = \alpha\,\vec{y}_1(x) + \beta\,\vec{y}_2(x)$ ist genau dann eine homogene Lösung von $(*)$, wenn $\alpha + \beta = 0$,

(ii) $\vec{y}(x) = \alpha\,\vec{y}_1(x) + \beta\,\vec{y}_2(x)$ ist genau dann eine inhomogene Lösung von $(*)$, wenn $\alpha + \beta = 1$.

5. Aufgabe

9 Punkte

a) Falsch. Gegenbeispiele liefern die *d'Alambertschen* Lösungen $f(x \pm ct)$ der Wellengleichung für beliebige zweimal differenzierbare Funktionen.

b) Falsch. Die GGPe des inhomogenen linearen DGL-Systems sind Lösungen des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = -\vec{b}$. Dieses ist nicht lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix A nicht gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist.

c) Wahr. Denn der Lösungsraum einer homogenen linearen DGL ist 2-dimensional und nach dem Wronski-Test sind y_1 und y_2 an der Stelle $t = 0$ und damit zugleich für alle t linear unabhängig.