Musterlösung Rechenteil — DGL, 8. April 2009

1. Aufgabe

9 Punkte

a) Bestätigung der Stammfunktion.

Trennung der Variablen führt auf

$$\int \frac{y'}{y-y^2} = \int 2 \Rightarrow \ln \frac{y}{1-y} = 2t \Rightarrow y = c\frac{1}{1+e^{-2t}}$$

und man erhält als Lösung des AWPs $y = \frac{1}{1+e^{-2t}}$.

b) Es gilt $y = \frac{1}{u} \Rightarrow y' = -\frac{u'}{u^2}$.

Damit erhält man das lineare AWP

$$u' + 2u - 1 = 0,\ u(0) = 2.$$

Als Lösung der homogenen Gleichung erhält man $u = ce^{-2t}$.

Variation der Konstanten liefert $u = 1 + e^{-2t}$, also $y = \frac{1}{1+e^{-2t}}$.

2. Aufgabe 11 Punkte

Als charakteristisches Polynom erhält man

$$-\det(A - \lambda E) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2).$$

Als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -2$ erhält man $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und als zugehörige Lösung $\vec{x}_1 = e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Als EV zum EW $\lambda = -1$ erhält man $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Ansatz $(A - \lambda E)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$ liefert den Hauptvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit erhält man die Lösungen

$\vec{x}_2 = e^{-t}\vec{v}_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_3 = e^{-t}(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Aufgabe

10 Punkte

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[y'' + y' - 2y\right](s) = \mathcal{L}\left[e^t\right](s) \\
\Leftrightarrow\ & s^2Y - (sy(0) + y'(0)) + sY - y(0) - 2Y = \frac{1}{s-1} \\
\Leftrightarrow\ & Y(s^2 + s - 2) = Y(s-1)(s+2) = s + 2 + \frac{1}{s-1} \\
\Leftrightarrow\ & Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2(s+2)}
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)(s+2)^2} = \frac{1}{s-1} + \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+2} \\
\Leftrightarrow\ & A(s-1)(s+2) + B(s+2) + C(s-1)^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & A = -\frac{1}{9},\ B = \frac{1}{3}\ C = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
& Y = \frac{8}{9}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{s+2} \\
\Rightarrow\ & y = \frac{8}{9}e^t + \frac{1}{3}te^t + \frac{1}{9}e^{-2t}
\end{aligned}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ erhält man das folgene Paar von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$X'' - \lambda X = 0$$
$$\ddot{T} - 4\lambda T = 0$$

Man betrachtet zunächst $X'' + \lambda X = 0$.
Fallunterscheidung:
Für $\lambda > 0$ erhält man die allgemeine Lösung

$$c_1 \cosh \sqrt{\lambda} x + c_2 \sinh \sqrt{\lambda} x$$

Die Randwerte liefern

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad u_x(\pi,t) = 0 \Rightarrow c_2 \sinh \sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

also nur die triviale Lösung.

Für $\lambda = 0$ erhält man die allgemeine Lösung $c_1 x + c_2$. Einsetzen der Randbedingungen liefert ebenfalls nur die triviale Lösung.

Für $\lambda < 0$ erhält man die allgemeine Lösung

$$c_1 \cos \sqrt{-\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{-\lambda} x$$

Die Randwerte liefern

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad u_x(\pi,t) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \text{ oder } \sqrt{-\lambda} = \frac{2k+1}{2},$$

also $X(x) = \sin(\frac{2k+1}{2}x)$.

Die allgemeine Lösung zu $\ddot{T} + 4\lambda T = 0$ für $\sqrt{\lambda} = \frac{2k+1}{2}$ lautet

$$A_k \cos((2k+1)t) + B_k \sin((2k+1)t)$$

und man erhält

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\frac{2k+1}{2}x)\{A_k \cos((2k+1)t) + B_k \sin((2k+1)t)\}$$