

## April – Klausur (Verständnisteil) Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: ..... Vorname: .....

Matr.-Nr.: ..... Studiengang: .....

---

Es ist nur ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

---

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

---

### Korrektur

1	2	3	4	5	$\Sigma$

## 1. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei die homogene lineare DGL 2. Ordnung

$$x^2 y'' + xy' - \alpha y = 0 \text{ mit einer Konstanten } \alpha \in \mathbb{R}$$

- a) Zeigen Sie, dass der allgemeine Potenzansatz  $y(x) = x^\lambda = e^{\lambda \ln x}$  im Fall  $\alpha > 0$  stets zwei linear unabhängige Lösungsfunktionen  $y_1, y_2 : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  liefert.
- b) Warum führt der Ansatz im Fall  $\alpha = 0$  nicht zum Ziel?

## 2. Aufgabe

6 Punkte

Begründen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Für die lineare DGL

$$y''' - 3y' - 2y = 0$$

bilden

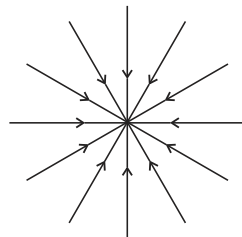
$$\{y_1, y_2, y_3\} = \{e^{-x}, e^{2x}, x e^{2x}\}$$

ein Fundamentalsystem.

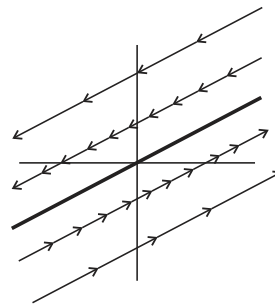
## 3. Aufgabe

8 Punkte

Untersuchen Sie, welche der beiden folgenden Skizzen (a) und (b) ein Phasen-



(a)



(b)

portrait des DGL-Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

im Gleichgewichtspunkt  $\vec{x} = \vec{0}$  darstellt. Begründen Sie Ihr Ergebnis!

#### 4. Aufgabe

8 Punkte

Die Populationsgrößen zweier Spezies zur Zeit  $t$  seien durch  $x(t)$ ,  $y(t)$  gegeben. Die Entwicklung der Populationsgrößen sei durch das folgende System von Differentialgleichungen beschrieben

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 5x - x^2 - 2xy, \\ \dot{y} &= 4y - y^2 - xy.\end{aligned}$$

Finden Sie jenen stationären Punkt, in dem beide Populationsgrößen positiv sind. Was können Sie über die Stabilität des Systems in Bezug auf diesen Gleichgewichtspunkt sagen?

#### 5. Aufgabe

10 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Nicht begründete Antworten werden nicht bewertet.

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$  (\*):

- a) Die PDG (\*) ist hyperbolisch.
- b) Da (\*) zwei unabhängige Variablen hat, ist der Lösungsraum von (\*) zweidimensional.

Betrachten Sie das lineare DGL-System  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$  (\*\*) für die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mit konstanten Koeffizienten.

- c) Wenn das Produkt der Eigenwerte von  $A$  positiv ist, dann ist das Gleichgewicht von (\*\*) in  $\vec{x} = 0$  instabil.
- d) Fünf verschiedene Lösungen von (\*\*) sind immer linear abhängig.
- e) Zwei Lösungen  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{x}_2$  von (\*\*) dürfen maximal nur in einem Punkt  $t_0$  denselben Wert  $\vec{x}_1(t_0) = \vec{x}_2(t_0)$  haben.