Musterlösung Verständnisteil — DGL, 8. April 2009

1. Aufgabe

8 Punkte

a) Es gilt $y' = \lambda x^{\lambda-1},\ y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$.
Einsetzen in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} & x^2y'' + xy' - \alpha y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^\lambda(\lambda^2 - \alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda = \pm\sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

Man erhält also Lösungen $y_1 = x^{\sqrt{\alpha}}, y_2 = x^{-\sqrt{\alpha}}$.
Wronskitest liefert

$$y_1(1)y_2'(1) - y_2(1)y_1'(1) = -2\sqrt{\alpha} \neq 0,$$

die Lösungen sind also linear unabhängig.

b) Für $\alpha = 0$ liefert der obige Ansatz nur die konstante Lösung.

2. Aufgabe

6 Punkte

Die charakteristische Gleichung einer linearen DGL mit den Lösungen

$$\{y_1, y_2, y_3\} = \{e^{-x}, e^{2x}, x\,e^{2x}\}$$

hat $\lambda = -1$ als einfache und $\lambda = 2$ als doppelte Nullstelle. Hat die DGL die Ordnung drei, so sind das alle Nullstellen und die charakteristische Gleichung lautet

$$(\lambda+1)(\lambda-2)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4.$$

Das ist aber nicht die charakteristische Gleichung der obigen DGL, folglich bilden $\{y_1, y_2, y_3\}$ kein Fundamentalsystem.

3. Aufgabe

8 Punkte

$\lambda = 0$ ist doppelter EW des DGL-Systems.

Man erhält also eine Hauptvektorlösung und das GGW ist instabil.

Das Phasenportrait (a) gehört zu einer stabilen Lösung und scheidet folglich aus.

Als Fundamentalsystem ermittelt man $\vec{x}_1 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Lösungen verlaufen folglich auf Geraden mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Aufgabe

8 Punkte

Die GGPe erfüllen

$$\begin{aligned} 0 &= x(5 - x - 2y), \\ 0 &= y(4 - y - x). \end{aligned}$$

Für den gesuchten stationären Punkt mit positiven Populationsgrößen erhält man $(x, y) = (3, 1)$. Um das Stabilitätsverhalten zu bestimmen, berechnet man für das System

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 5x - x^2 - 2xy \\ 4y - y^2 - xy \end{pmatrix}$$

die Jacobimatrix

$$J_F = \begin{pmatrix} 5 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 4 - 2y - x \end{pmatrix}$$

und erhält

$$J_F(3, 1) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die EWe von $J_F(3, 1)$ sind $-2 \pm \sqrt{7}$.

Da einer der EWe positiv ist, ist der GGP instabil.

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch. Die PDG ist parabolisch, da $ac - (\frac{b}{2})^2 = 0$.

b) Falsch. Mit dem Separationsansatz ermittelt man unendlich viele linear unabhängige Lösungen.

c) Wahr. Damit das Produnkt der drei EWe einer 3×3-Matrix positiv ist, muss mindestens ein EW positiv sein und das GGW ist instabil.

d) Wahr. Der Lösungsraum ist 3-dimensional.

e) Falsch. Nach dem EES sind sie dann bereits identisch.