1. Aufgabe (10 Punkte)

$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda 2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\Leftrightarrow\ \lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow\ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\vec{v_1} = \vec{0}$ also z.B. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow\ \vec{y_1}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\vec{v_2} = \vec{0}$, also z.B. $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \vec{y_2}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{y_h}(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aus $\vec{y_p}(t) = e^t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ folgt $\vec{y}'_p(t) = e^t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\vec{y_p} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} a+b \\ -2a+4b+2 \end{pmatrix}$,

also muss gelten $b = 0$ und $a = 1 \Rightarrow y_p(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung: $y(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 + c_1 + c_2 \\ 2c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = -1$

$\Rightarrow y(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Aufgabe (7+4 Punkte)

a) $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$

$\Rightarrow y_1(t) = e^{-2t}\cos t,\ y_2(t) = e^{-2t}\sin t,$

$y_h(t) = c_1 e^{-2t}\cos t + c_2 e^{-2t}\sin t$

Ansatz: $y_p(t) = A\cos t + B\sin t$

$\Rightarrow y_p'(t) = -A\sin t + B\cos t \Rightarrow y_p''(t) = -A\cos t - B\sin t$

Einsetzen: $y_p'' + 4y_p' + 5y_p = (4A + 4B)\cos t + (-4A + 4B)\sin t$

$\Rightarrow A = B = 1 \Rightarrow y_p(t) = \cos t + \sin t.$

allg. Lösung: $y(t) = \cos t + \sin t + c_1 e^{-2t}\cos t + c_2 e^{-2t}\sin t$

b) Variablentrennung: $\frac{y'}{(y+1)^2} = e^{-x}$

$\int \frac{1}{(y+1)^2}dy = \int e^{-x}dx + c$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{y+1} = -e^{-x} + c$

$\Rightarrow y(x) = -1 + \frac{1}{e^{-x}-c}$

3. Aufgabe (9 Punkte)

Für GGL gilt $x = 0 \vee x + 2y = 3$ und $y = 0 \vee 2x + y = 3$

Man erhält die GGL $(0, 0)$, $(0, 3)$ $(3, 0)$ und $(1, 1)$.

Jacobi-Matrix: $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -2y & 3 - 2x - 2y \end{pmatrix}$

$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat die EW $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 > 0$, also ist die GGL $(0, 0)$ instabil

$J_f(0, 3) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ hat EW $\lambda_1 = \lambda_2 = -3 < 0$, GGL $(0, 3)$ ist asympt. stabil

$J_f(3, 0) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ hat EW $\lambda_1 = \lambda_2 = -3 < 0$, GGL $(3, 0)$ ist asymp. stabil

$J_f(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\det\big(J_f(1, 1) - \lambda I\big) = (\lambda + 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2$

$\lambda_1 = -1 + 2 = 1 > 0$, also ist die GGL $(1, 1)$ ist instabil

4. Aufgabe (10 Punkte)

a) Einsetzen ergibt $X\dot{T} = 3X''T$,

d.h. $\frac{\dot{T}}{3T} = \frac{X''}{X} = c$, also $\dot{T} = 3cT$ und $X'' = cX$.

Für $c = \alpha^2 > 0$ ist $X(x) = ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}$ nicht periodisch.

Für $c = 0$ ist $X(x) = a + bx$ periodisch, falls $b = 0$, d.h. $X(x) = a$.

Für $c = -\omega^2 < 0$ ist $X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ immer periodisch.

Wegen $T(t) = e^{3ct}$ erhält man Lösungen der Gestalt

$u(x, t) = (a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x))e^{-3\omega^2 t}$ mit $\omega \geq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$.

b) $u(0, t) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow u(x, t) = b\sin(\omega x)e^{-3\omega^2 t}$

$u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \Rightarrow \frac{\omega\pi}{2} = k\pi \Rightarrow \omega = 2k, k = 1, 2, \ldots$

Man erhält die Lösungen $u_k(x, t) = b_k \sin(2kx)e^{-12k^2 t}$

c) Mit Superposition und $b_1 = 3, b_2 = 2$

erhält man $u(x, t) = 3\sin(2x)e^{-12t} + 2\sin(4x)e^{-48t}$.