1. Aufgabe (11 Punkte) a) Da

$$y_1(t) = e^{-3t} \sin(2t) = \text{Im } e^{(-3+2i)t}$$

Lösung der Dgl. ist und die Koeffizienten reell sind, müssen $-3+2i$ und $-3-2i$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Dgl. sein. Damit ist auch

$$y_2(t) = \text{Re } e^{(-3+2i)t} = e^{-3t} \cos(2t)$$

eine Lösung der Dgl.
Darüberhinaus ist jede konstante Funktion eine Lösung der Dgl., also auch $y_3(t) = 1$.
y_1, y_2, y_3 sind linear unabhängig.
a) Die allgemeine Lösung der Dgl. ist somit:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) = c_1 e^{-3t} \sin(2t) + c_2 e^{-3t} \cos(2t) + c_3,$$

wobei c_1, c_2, c_3 Konstanten .
b) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$P(\lambda) = (\lambda + 3 - 2i)(\lambda + 3 + 2i)\lambda = ([\lambda + 3]^2 + 4)\lambda$$

$$= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 13\lambda,$$

also $a_1 = 13$ und $a_2 = 6$. Die Dgl. lautet somit:

$$y''' + 6y'' + 13y' = 0.$$

c) Nach (b) ist $\lambda_1 = 0$ einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Für die Inhomogenität $1 = e^{0t} = e^{\lambda_1 t}$ lautet damit der Ansatz für die spezielle Lösung:

$$y_p(t) = tAe^{\lambda_1 t} = At.$$

2. Aufgabe (10 Punkte) Es gilt

$$\int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau = (e^t * y)(t).$$

Mit dem Faltungssatz folgt

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau\right](s) = \mathcal{L}[e^t](s)\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s-1}\mathcal{L}[y](s).$$

Mit dem Differentiationssatz gilt nun

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[y'' + 2y' + 7y + e^t * y](s)\\
&= s^2\mathcal{L}[y](s) - y'(0) - sy(0) + 2(s\mathcal{L}[y](s) - y(0)) + 7\mathcal{L}[y](s) + \frac{1}{s-1}\mathcal{L}[y](s)\\
&= \left(s^2 + 2s + 7 + \frac{1}{s-1}\right)\mathcal{L}[y](s) - 2 - 3s - 6.\\
&\overset{!}{=} \mathcal{L}[\cos t](s) = \frac{s}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Für die Laplace-Transformierte ergibt sich

$$\mathcal{L}[y](s) = \left(s^2 + 2s + 7 + \frac{1}{s-1}\right)^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1} + 3s + 8\right).$$

3. Aufgabe (9 Punkte)

a) **Richtig!** Die Differenz $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ zweier Lösungen der inhomogenen Dgl. ist Lösung der homogenen Dgl.

b) **Richtig!** Da $f(1) = 0$, ist 1 ein Gleichgewichtspunkt. Die Jacobi-Matix $f'(1) < 0$ hat im eindimensionalen Fall nur sich selbst als Eigenwert, dieser ist hier negativ, folglich ist 1 asymptotisch stabiler GGP.

c) **Falsch!** Nach dem Dämpfungssatz gilt

$$\mathcal{L}[e^{2t}y(t)](s) = \mathcal{L}[y](s-2) = \frac{(s-2)^3 + 4}{(s-2)^6 + 1}.$$

4. Aufgabe (10 Punkte) Mit dem Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ gilt

$$u_t(x,t) = X(x)T'(t) \text{ und } u_x(x,t) = X'(x)T(t).$$

Einsetzen in die partielle Differenzialgleichung ergibt

$$X(x)T'(t) = u_t(x,t) = (1+x^2)u_x(x,t) = (1+x^2)X'(x)T(t).$$

Damit gilt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{(1+x^2)X'(x)}{X(x)} = \lambda \text{ Konstante }.$$

Daraus erhalten wir für X, T die Dgln.

$$T'(t) = \lambda T(t) \text{ und } X'(x) = \frac{\lambda}{(1+x^2)}X(x).$$

Die allgemeine Lösung dieser Dgln. lautet

$$X(x) = C_1 \exp\left(\int \frac{\lambda}{(1+x^2)}dx\right) = C_2 e^{\lambda \arctan x}, \quad T(t) = C_3 e^{\lambda t}$$

mit Konstanten C_2, C_3.
Insgesamt ergibt sich

$$u(x,t) = X(x)T(t) = C_3 e^{\lambda \arctan x} C_2 e^{\lambda t} = K e^{\lambda[\arctan x + t]}$$

mit neuer Konstanten K.