**1. Aufgabe** (8 Punkte)

a) $\int \frac{1}{(y-1)^2}\,dy = \int 2x\,dx + c \Rightarrow \frac{-1}{y-1} = x^2 + c \Rightarrow y(x) = 1 - \frac{1}{x^2+c}$ .
Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt
$0 = 1 - \frac{1}{c} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$ .

b) Die stationäre Lösung $y(x) = 1$ löst das AWP.

**2. Aufgabe** (12 Punkte)

a) Wegen $\begin{pmatrix} \frac{t+1}{t} & -t \\ \frac{1}{t} & -1 \end{pmatrix} \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} (t+1)^2 - t^2 \\ t+1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dot{\vec{y}}_1(t)$

und $\begin{pmatrix} \frac{t+1}{t} & -t \\ \frac{1}{t} & -1 \end{pmatrix} \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} t+1-t \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\vec{y}}_2(t)$

lösen $\vec{y}_1(t)$ und $\vec{y}_2(t)$ das System.

Die Wronski-Determinante ist $\det(\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t)) = (t^2+t) \cdot 1 - t \cdot t = t \neq 0$ .

Deshalb sind $\vec{y}_2(t)$ und $\vec{y}_2(t)$ linear unabhängig und bilden eine Lösungsbasis.

b) Eine partikuläre Lösung ist $\vec{y}_p(t) = W(t)\vec{c}(t)$ mit $\vec{c}(t) = \int W^{-1}(t)\vec{b}(t)\,dt$.

Mit $W(t) = \begin{pmatrix} t^2+t & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ erhält man

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t & t^2+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ -1 & t+1 \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}(t)\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ -1 & t+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - 2e^{2t} \\ -2te^{2t} + 2te^{2t} + 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}(t) = \int \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_p(t) = \begin{pmatrix} t^2+t & t \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_p(t) + c_1\vec{y}_1(t) + c_2\vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} t^2+t \\ t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**3. Aufgabe** (12 Punkte)

Für GGL gilt $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ 2(x+2)(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

d.h. $y = x^2$ und $x = -2 \ \vee \ y = 1$.

Es ergeben sich die Punkte $(-2,4)$, $(1,1)$ und $(-1,1)$.

Die Jacobi-Matrix ist $J_{\vec{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2(y-1) & 2(x+2) \end{pmatrix}$.

$J_{\vec{f}}(-2,4) = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{4-6} = -2 \pm i\sqrt{2}$.

Da beide EW negativen Realteil haben ist die GGL $(-2,4)$ asymptotisch stabil.

$J_{\vec{f}}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ hat die positiven Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 6$.

$J_{\vec{f}}(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ hat den positiven Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

Deshalb sind die GGL $(1,1)$ und $(-1,1)$ instabil.

**4. Aufgabe** (8 Punkte)

Mit $Y = \mathcal{L}[y]$ erhält man $\mathcal{L}[y'] = sY - 1$ und $\mathcal{L}[y''] = s^2Y - s + 1$.

Weiter gilt $\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$. Einsetzen ergibt

$$s^2Y - s + 1 + 2(sY - 1) + Y = \frac{2}{s+1} \Leftrightarrow (s+1)^2Y = s + 1 + \frac{2}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^3}\,.$$

Rücktransformation liefert $y(t) = e^{-t} + t^2e^{-t}$.