Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 08

Penn-Karras 8. Oktober 2008

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

11 Punkte

a) Die lineare, homogene Differentialgleichung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit konstanten, reellen Koeffizienten a_0 und a_1 habe $y_1(t) = te^{2t}$ als Lösung. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 und a_1 und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) Wir betrachten die lineare, inhomogene Differentialgleichung

$$y'' + b_1 y' + b_0 y = e^{3t} \sin t$$

mit konstanten, reellen Koeffizienten b_0 und b_1. Die entsprechende homogene Differentialgleichung habe $y_1(t) = e^{3t} \cos t$ als Lösung. Bestimmen Sie einen Ansatz vom Typ der rechten Seite für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

2. Aufgabe

8 Punkte

Sei $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Lösung des Anfangswertproblems

$$y''' - \int_0^t \cos(t - \tau) y(\tau) d\tau = e^{3t}$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 3, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 1$.
Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $\mathcal{L}[y](s)$ von y. Die Rücktransformation, d.h. die Bestimmung von y selbst ist nicht verlangt.

3. Aufgabe

10 Punkte

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für welche die Gleichgewichtslösung $\vec{x}_g(t) = 0$ stabil ist. Geben Sie auch alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für welche die Gleichgewichtslösung asymptotisch stabil ist.

4. Aufgabe

11 Punkte

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe die Fouriereihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(kx).$$

Bestimmen Sie die Funktionen $a_k(t)$, so dass

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(kx)$$

das Anfangswertproblem

$$u_t = t u_{xx}, \qquad u(x, 0) = f(x)$$

löst.