1. Aufgabe (11 Punkte) a) Da $y_1(t) = te^{2t}$ Lösung der Dgl. ist, muss 2 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ der Dgl. sein. Damit gilt

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4,$$

somit $a_1 = -4$ und $a_0 = 4$. Da 2 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, haben wir als weitere Lösung der Dgl. $y_2(t) = e^{2t}$. Die allgemeine Lösung der Dgl. ist somit:

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1te^{2t} + c_2e^{2t},$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind.
b) Da $y_1(t) = e^{3t}\cos t$ Lösung der Dgl. ist, müssen $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$ (einfache) Nullstellen des charakteristischen Polynoms sein. Für die Inhomogenität

$$f(t) = e^{3t}\sin t = \text{Im } e^{(3+i)t}$$

lautet damit der Ansatz für die spezielle Lösung:

$$y_p(t) = te^{3t}(A\cos t + B\sin t).$$

2. Aufgabe (8 Punkte) Es gilt

$$\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = (\cos t * y)(t).$$

Mit dem Faltungssatz folgt

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau\right](s) = \mathcal{L}[\cos t](s)\mathcal{L}[y](s) = \frac{s}{s^2+1}\mathcal{L}[y](s).$$

Mit dem Differentiationssatz gilt nun

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[y''' - (\cos t * y)](s) \\
&= s^3\mathcal{L}[y](s) - y'' - sy'(0) - s^2 y(0) - \frac{s}{s^2+1}\mathcal{L}[y](s) \\
&= \left(s^3 - \frac{s}{s^2+1}\right)\mathcal{L}[y](s) - 1 - 2s - 3s^2. \\
&\overset{!}{=} \mathcal{L}[e^{3t}](s) = \frac{1}{s-3}.
\end{aligned}$$

Für die Laplace-Transformierte ergibt sich

$$\mathcal{L}[y](s) = \left(s^3 - \frac{s}{s^2+1}\right)^{-1}\left(\frac{1}{s-3} + 1 + 2s + 3s^2\right).$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Eigenwerte der Matrix bestimmen:

$$\det(A_\alpha - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha - \lambda)(2\alpha - \lambda) - 2\alpha^2 = \lambda^2 - 3\alpha\lambda \stackrel{!}{=} 0,$$

Wir erhalten die EW

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3\alpha, \text{ insbesondere Re } \lambda_1 = 0, \text{Re } \lambda_2 = 3\alpha.$$

Die Gleichgewichtslösung $\vec{x} = \vec{0}$ ist instabil, falls $\alpha > 0$.

Sie ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil , falls $\alpha < 0$ ($\lambda_1 = 0$ ist einfacher EW).

Sei nun $\alpha = 0$.
Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$:

$$A_0\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} \text{ beliebig }.$$

Die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 0$ ist also 2, damit gleich der algebraischen Vielfachheit 2 ($\lambda_1 = 0$ ist doppelter EW). Daher ist die Gleichgewichtslösung stabil, aber auch nicht asymptotisch stabil).

4. Aufgabe (11 Punkte) Mit dem Ansatz für $u(x,t)$ gilt

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k'(t) \sin(kx) \text{ und } u_{xx}(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k(t) \sin(kx).$$

Einsetzen in die partielle Differenzialgleichung ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k'(t) \sin(kx) = u_t(x,t) \stackrel{!}{=} t u_{xx}(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 t a_k(t) \sin(kx).$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_k'(t) = -k^2 t a_k(t).$$

Die allgemeine Lösung dieser Dgln. lautet

$$a_k(t) = C_k \exp\left(-k^2 \int t dt\right) = C_k e^{-k^2 t^2/2}$$

mit Konstanten C_k.

Mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) \sin(kx) = u(x,0) \stackrel{!}{=} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \sin(kx),$$

und somit $C_k = a_k(0) = k^{-2}$. Insgesamt ergibt sich $a_k(t) = k^{-2} e^{-k^2t^2/2}$ und damit

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} e^{-k^2 t^2/2} \sin(kx)$$