Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

WS 2009/2010

Differentialgleichungen für Ingenieure
Klausur Februar 10
Lösung Rechenteil

Aufgabe 1:
Eigenwerte der Matrix A:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(-2-\lambda) = 0$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$.
Zu $\lambda_1 = 1$ bestimmt man den Eigenvektor:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man einen Hauptvektor zu λ_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu $\lambda_2 = -2$ bestimmt man den Eigenvektor:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Damit erhält man als allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \ , \ c_2 \ , \ c_3 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2:

a) Einsetzen des Separationsanatzes $u(x,t) = X(x)T(t)$ in die DGl liefert:

$$4X''(x)T(t) = X(x)\dot{T}(t)$$

und

$$4\frac{X''}{X} = \frac{\dot{T}}{T} = C\ .$$

Nur der Fall einer nicht-positiven Separationskonstanten $C = -\alpha^2$ liefert periodische Lösungen, nämlich:
$\alpha \neq 0$:

$$X(x) = a\cos\left(\frac{\alpha}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\alpha}{2}x\right)$$

Aus der zweiten gewöhnlichen DGl folgt:

$$T(t) = ce^{-\alpha^2 t}\ .$$

Mit den Konstanten $A = ca$ und $B = cb$ lauten Lösungen der DGl, die periodisch in x sind

$$u(x,t) = e^{-\alpha^2 t}\left(A\cos\left(\frac{\alpha}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\alpha}{2}x\right)\right)\ , \quad \alpha \neq 0$$

Im Fall $\alpha = 0$:

$$X'' = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = dx + e\ .$$

Periodisch ist die Lösung mit $d = 0$, $X(x) = e$. Mit $\alpha = 0$ ist $T(t) = c$, und die Lösung ist konstant:

$$u(x,t) = ce = E\ .$$

b) Auswerten der Randbedingungen:
Fall $\alpha \neq 0$:

$$u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$
$$u(2,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad B\sin\left(\frac{\alpha}{2}2\right) = 0$$

Die zweite Randbedingung wird entweder erfüllt durch die triviale Lösung $B = 0$, $u(x,t) = 0$ oder durch

$$\alpha = k\pi\ , \quad k \in \mathbb{Z}\ .$$

Man erhält die Lösungen

$$u_k(x,t) = B_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) e^{-(k\pi)^2 t}\ .$$

Fall $\alpha = 0$:

$$u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0\ ,$$

und in diesem Fall erfüllt nur die triviale Lösung $u(x,t) = 0$ die Randbedingungen.

c) Superposition liefert die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) e^{-(k\pi)^2 t} \ .$$

Aus der Anfangsbedingung folgt:

$$\begin{aligned} u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) &= 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ \Rightarrow B_1 = 3 \ , \quad & B_i = 0 \text{ für } i \neq 1 \ . \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(x,t) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) e^{-\pi^2 t} \ .$$

Aufgabe 3:

a) Die DGl ist separabel:

$$\begin{aligned} y' e^{-y} &= \cos x \\ \int e^{-y} dy &= \int \cos x dx \\ -e^{-y} &= \sin x + C \end{aligned}$$

und die allgemeine Lösung der DGl ist

$$y(x) = -\ln\left(-\sin x - C\right) \ .$$

Aus der Anfangsbedingung bestimmt man die Konstante C:

$$\begin{aligned} y(\pi) = -\ln\left(-\sin \pi - C\right) = -\ln(-C) &= 0 \\ \Rightarrow C &= -1 \end{aligned}$$

und die Lösung des AWP's ist:

$$y(x) = -\ln\left(-\sin x + 1\right) \ .$$

b) Der Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 10} = -1 \pm 3i \ .$$

Damit ist

$$y(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right)$$

die allgemeine reelle Lösung der DGl.

Aufgabe 4:
In den Gleichgewichtspunkten (x_G, y_G) gilt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= 0 = x_G(3 - x_G - 2y_G) \\ \dot{y}_G &= 0 = y_G(4 - 3x_G - y_G) \ . \end{aligned}$$

Als Lösungen dieses Gleichungssystems findet man:

$$(x_{G1}, y_{G1}) = (0, 0) \ ,$$

$$\begin{aligned} x_{G2} = 0 \ , \quad 4 - 3x_{G2} - y_{G2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad y_{G2} = 4 \\ &(x_{G2}, y_{G2}) = (0, 4) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{G3} = 0 \ , \quad 3 - x_{G3} - 2y_{G3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_{G3} = 3 \\ &(x_{G3}, y_{G3}) = (3, 0) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 - x_{G4} - 2y_{G4} = 0 \ , \quad &4 - 3x_{G4} - y_{G4} = 0 \\ &(x_{G4}, y_{G4}) = (1, 1) \ . \end{aligned}$$

Die Matrix des linearisierten Systems ist

$$J = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -3y & 4 - 2y - 3x \end{pmatrix} \ .$$

Ausgewertet an den Gleichgewichtspunkten:

(a)

$$J|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$. Die Eigenwerte sind reell und positiv. Damit ist der Gleichgewichtspunkt instabil.

(b)

$$J|_{(3,0)} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -5$. Die Eigenwerte sind reell und negativ. Damit ist der Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil.

(c)

$$J|_{(0,4)} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -4$. Die Eigenwerte sind reell und negativ. Damit ist der Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil.

(d)

$$J|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte berechnet man zu:

$$\det\left(J|_{(1,1)} - \lambda I\right) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 - 6 = \lambda^2 + 2\lambda - 5$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6} .$$

Damit ist $\lambda_1 > 0$, und der Gleichgewichtspunkt ist instabil.