Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

WS 2009/2010

Differentialgleichungen für Ingenieure
Klausur Februar 10
Lösung Verständnisteil

Aufgabe 1:

(a) Aus dem Faktor $\cos t$ folgt, daß i ein Eigenwert sein muß. Damit ist auch $-i$ ein Eigenwert. Der Faktor t zeigt, daß die Nullstelle doppelt ist, d.h.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i \ , \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -i \ .$$

Es gibt mindestens 4 Eigenwerte. Daraus folgt, daß die kleinste Ordnung 4 ist:

$$y'''' + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 = 0 \ .$$

Aus dem charakteristischen Polynom schließt man:

$$P(\lambda) = (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 = (\lambda^2 + 1)^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 \ .$$

Daher lautet die DGl:

$$y'''' + 2y'' + y = 0 \ .$$

(b) $\cos t$, $\sin t$, $t \cos t$, $t \sin t$.

(c) Es liegt Resonanz vor mit einer doppelten Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Deshalb lautet der Ansatz:

$$t^2 \left(A \cos t + B \sin t \right) \ .$$

Aufgabe 2:

(a) Falsch: Der Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ liefert unendlich viele linear unabhängige Lösungen. Lösungen.

(b) Die Realteile aller Eigenwerte sind ≤ 0, und es gibt keinen mehrfachen Eigenwert. Daher ist die Gleichgewichtslösung stabil. Da der Realteil 0 vorkommt, ist die Gleichgewichtslösung nicht asymptotisch stabil.

Aufgabe 3:

$Y(s) = L[y](s)$ bezeichne die Laplace-Transformierte von $y(t)$. Laplace-Transformation der DGl Liefert:

$$s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) + 2\,(sY(s) - y(0)) + Y(s)\frac{s}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2}\ ,$$

bzw. nach Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$s^2Y(s) - 4 - 2s + 2\,(sY(s) - 2) + Y(s)\frac{s}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2}\ .$$

$Y(s)$ erfüllt die Gleichung:

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{1+s^2} + 2s + 8}{s^2 + 2s + \frac{s}{1+s^2}} = \frac{1 + (2s+8)(1+s^2)}{(s^2+2s)(1+s^2) + s}\ .$$

Aufgabe 4:

(a) Falsch, da die DGl inhomogen ist:

$$(x_1 + x_2)'' - 3(x_1 + x_2)' + x_1 + x_2 = x_1'' - 3x_1' + x_1 + x_2'' - 3x_2' + x_2 = 2te^t\ .$$

Die Summe erfüllt also nicht die DGl.

(b) Falsch, da zu der DGl 3. Ordnung nur 2 Anfangsbedingungen gegeben sind.

(c) Falsch, denn es gilt:

$$L[1 * f] = L[1] \cdot L[f] = \frac{1}{s}L[f] \neq L[f]\ .$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes kann damit für die Rücktransformierten auch nicht die Behauptung gelten.