Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

WS 2009/2010

# Differentialgleichungen für Ingenieure
# Klausur April 10
# Lösung Rechenteil

**Aufgabe 1:**
Berechnen der Eigenwerte der Matrix:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left((3-\lambda)(2-\lambda)-1-1\right)$$
$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2-5\lambda+4\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 1\ , \quad \lambda_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-4}$$
$$\lambda_2 = 4\ , \quad \lambda_3 = 1\ .$$

Zu $\lambda_2 = 4$ findet man den Eigenvektor:

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 2 & 1 \\ 0 & 3-4 & 1 \\ 1 & 1 & 2-4 \end{pmatrix}\vec{v}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

Zum doppelten Eigenwert $\lambda = 1$ findet man einen Eigenvektor:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 1 \\ 0 & 3-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix}\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\ .$$

Es muß also noch ein Hauptvektor bestimmt werden durch Lösen des Gleichungssystems:

$$(A-\lambda E)\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{v}_1\ .$$

Man erhält

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

Somit sind drei linear unabhängige Lösungen der DGl:

$$\vec{y}_1(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\ ,$$

$$\vec{y}_2(x) = e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\vec{y}_3(x) = e^x \left(\vec{w} + x\vec{v}_1\right) = e^x \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

und die allgemeine Lösung der DGl lautet:

$$\vec{y}(x) = C_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^x \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) .$$

**Aufgabe 2:**
Zu dem DGl-System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(1 - y - x) \\ \dot{y} &= y\,(2 - 3y - x) \end{aligned}$$

findet man folgende Gleichgewichtspunkte:

**(a)**

$$x_1 = 0\ , \quad y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x,y)_{G1} = (0,0)$$

**(b)**

$$x_2 = 0\ , \quad 2 - 3y_2 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x,y)_{G2} = (0, \frac{2}{3})$$

**(c)**

$$y_3 = 0\ , \quad 1 - y_3 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x,y)_{G3} = (1,0)$$

**(d)**

$$1 - y_4 - x_4 = 0\ , \quad 2 - 3y_4 - x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x,y)_{G4} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Die Jakobi-Matrix zu dem DGl-System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - xy - x^2 \\ \dot{y} &= 2y - 3y^2 - yx \end{aligned}$$

lautet

$$\begin{pmatrix} 1 - y - 2x & -x \\ -y & 2 - 6y - x \end{pmatrix} .$$

Ausgewertet an den Gleichgewichtspunkten:

**(a)**

$$J_{G1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Die EW sind reell und positiv, d.h. der Gleichgewichtspunkt ist instabil.

**(b)**

$$J_{G2} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ und $\lambda_2 = -2$. Die EW sind reell und $\lambda_1$ ist positiv, d.h. der Gleichgewichtspunkt ist instabil.

**(c)**

$$J_{G3} = \begin{pmatrix} 1 - 2 & -1 \\ 0 & 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$. $\lambda_2$ ist positiv. Daher ist der Gleichgewichtspunkt instabil.

**(d)**

$$J_{G4} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 - \frac{6}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$\det\left(J_{G4} - \lambda I\right) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2}$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\,, \quad \lambda_2 = -1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\,.$$

Beide Eigenwerte sind negativ. Daher ist der Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil.

**Aufgabe 3:**
Laplace-Transformation der DGl ergibt:

$$\begin{aligned} L[\ddot{x} - 2\dot{x} + x] &= L[te^t] \\ X(s)s^2 - x(0)s - \dot{x}(0) - 2(X(s)s - x(0)) + X(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} \\ X(s)s^2 - 1 - 2X(s)s + X(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

mit $X(s) = L[x](s)$. Die Gleichung

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

ergibt nach Rücktransformation die Lösung des AWP's:

$$x(t) = \frac{t^3 e^t}{3!} + \frac{te^t}{1!} = \frac{t^3 e^t}{6} + te^t \ .$$

**Aufgabe 4:**

a) Einsetzen des Separationsansatzes in die DGl liefert:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\frac{X''}{X} = \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

Periodisch in $x$ sind die Lösungen nur für $\lambda \geq 0$. Im Fall $\lambda > 0$ findet man:

$$\begin{aligned} T(t) &= Ae^{\sqrt{\lambda}t} + Be^{-\sqrt{\lambda}t} \\ X(x) &= C\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + D\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \ . \end{aligned}$$

Im Fall $\lambda = 0$ findet man:

$$\begin{aligned} T(t) &= A + Bt \\ X(x) &= C + Dx \ . \end{aligned}$$

Periodisch in $x$ ist die Lösung nur für $D = 0$.

b) Im Fall $\lambda = 0$ erfüllt nur die triviale Lösung die Randbedingung. Im Fall $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \Rightarrow \quad & X(0) = X(1) = 0 \\ X(0) = C\cos\left(\sqrt{\lambda}0\right) + D\sin\left(\sqrt{\lambda}0\right) &= C = 0 \\ X(1) = D\sin\left(\sqrt{\lambda}1\right) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Entweder ist $D = 0$ (triviale Lösung) oder

$$\sqrt{\lambda} = k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Als Lösung erhält man:

$$u(x,t) = \sin(k\pi x)\left(\tilde{A}e^{k\pi t} + \tilde{B}e^{-k\pi t}\right) \ .$$

c) Die Randbedingung erfordert $\tilde{A} = 0$, also

$$u(x,t) = \sin(k\pi x)\left(\tilde{B}e^{-k\pi t}\right) \ .$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_k \sin(k\pi x)\, e^{-k\pi t} \ .$$

d) Die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(2\pi x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_k \sin(k\pi x)$$

wird erfüllt, falls

$$k = 2 \quad \text{und} \quad \tilde{B}_2 = 1 \ ,$$

also:

$$u(x,t) = \sin(2\pi x)\, e^{-2\pi t} \ .$$