Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. G. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

WS 2009/2010

Differentialgleichungen für Ingenieure
Klausur April 10
Lösung Verständnisteil

Aufgabe 1:

1. Aus der Lösung $y_1(t) = 1$ schließt man, daß $\lambda_1 = 0$ ein Eigenwert ist. Aus der Lösung $y_2(t) = e^{-2t} \cos t$ schließt man, daß $\lambda_2 = -2 + i$ ein weiterer Eigenwert ist. Damit muß auch $\lambda_3 = -2 - i$ ein Eigenwert sein. Damit lautet das charakteristische Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda\,(\lambda + 2 + i)\,(\lambda + 2 - i)$$
$$\lambda\left(\lambda^2 + 4\lambda + 5\right) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda \ .$$

   Eine DGl dazu ist

$$y''' + 4y'' + 5y' = 0 \ .$$

2. $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = e^{-2t} \cos t$ und $y_3(t) = e^{-2t} \sin t$ bilden ein Fundamentalsystem.

3. (a) Es liegt keine Resonanz vor. Der Ansatz lautet

$$y_p(t) = A \cos t + B \sin t \ .$$

   (b) Es liegt Resonanz vor. Der Ansatz lautet

$$y_p(t) = te^{-2t}\,(A \cos t + B \sin t) \ .$$

Aufgabe 2:
Die Wronskimatrix lautet

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & e^t \end{pmatrix} \ .$$

Damit führt der Ansatz $\vec{y}_p(t) = c_1(t)\vec{y}_1(t) + c_2(t)\vec{y}_2(t)$ für die partikuläre Lösung auf das DGl-System:

$$W(t) \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \vec{b}(t)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Aus den Zeilen erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 = e^t \quad &\Rightarrow \quad c_1(t) = e^t \\ -\dot{c}_1 + \dot{c}_2 e^t = 0 \quad \Rightarrow \quad -e^t + \dot{c}_2 e^t = 0 \quad &\Rightarrow \quad c_2(t) = t \end{aligned}$$

Damit lautet die partikuläre Lösung

$$\vec{y}_p(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung der inhomogenen DGl:

$$\vec{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix} \; .$$

Aufgabe 3:
Der Ansatz führt auf

$$X\dot{T} = \sin t X'T$$

und nach Trennung der Variablen

$$\frac{\dot{T}}{T \sin t} = \frac{X'}{X} = \lambda \in \mathbb{R} \; .$$

Damit erhält man zwei gewöhnliche DGl's:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{T}}{T} &= \lambda \sin t \\ \ln T &= -\lambda \cos t + C \\ T(t) &= \tilde{C} e^{-\lambda \cos t} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{X'}{X} &= \lambda \\ X(x) &= e^{\lambda x} \; . \end{aligned}$$

Damit hat man eine Lösung der partiellen DGl:

$$u(x,t) = \tilde{C} e^{-\lambda \cos t} e^{\lambda x} = \tilde{C} e^{\lambda(x - \cos t)} \; .$$

Aufgabe 4:

1. Die 'rechte Seite' der DGl

   $$F(x,y) = e^y - e \cdot \cos(y-1)$$

   ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$:

   $$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= e^y + e \cdot \sin(y-1) \; . \end{aligned}$$

   Damit ist nach EES das AWP eindeutig lösbar.

2. Die Lösung des AWP's ist $y(x) = 1$, denn y erfüllt die DGL:

$$y'(x) \equiv 0 \ , \quad e^y - e \cdot \cos(y-1) = e^1 - e\cos(0) = 0$$

und die Anfangsbedingung $y(3) = 1$.

Aufgabe 5:

1. Transformation auf ein System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} x' &= v \\ v' + v^2 + 2xv + x^2 + 2x &= 0 \ . \end{aligned}$$

2. In Gleichgewichtspunkten muß gelten $x' = 0$ und $v' = 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \ , \quad x_2 &= -2 \ . \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind:

$$(0,0) \quad \text{und} \quad (-2,0) \ .$$