Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. G. Bärwolff

WS 10/11
28. Februar 2011

Februar – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 65 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Zur Benotung der Klausur wird von 60 erreichbaren Punkten ausgegangen.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Rechenteil

1. Aufgabe

10+1 Punkte

Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}$ des Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

2. Aufgabe

10+1 Punkte

Ermitteln Sie die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 6x(t) = 30\mathrm{e}^{-(t-1)} u_1(t), \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Dabei ist $u_a(t)$ die Funktion, welche bei $t = a$ von 0 auf 1 springt (Heaviside-Funktion).

3. Aufgabe

10+1 Punkte

Gegeben ist die reelle partielle Differentialgleichung in $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = 0.$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Produktansatzes alle nicht-konstanten Lösungen $u(x,t)$, die in x periodisch sind und die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$$

erfüllen.

b) Konstruieren Sie mit den Lösungen aus a) eine Lösung $u(x,t)$, die die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2\cos 3x$ erfüllt.

Bitte wenden!

Verständnisteil

4. Aufgabe

10+1 Punkte

Entscheiden Sie, ob das Anfangswertproblem

$$y' - y^2 \sin x = 0, \qquad y(0) = \frac{1}{2},$$

eindeutig lösbar ist. Ermitteln Sie die Lösung(en) und deren Definitionsbereich(e).

5. Aufgabe

10+1 Punkte

Ein dynamisches System $\big(x(t), y(t)\big)$ wird durch das DGL-System

$$\dot{x} = -x\mathrm{e}^{-y}, \quad \dot{y} = x - y\mathrm{e}^{-x}$$

beschrieben.

a) Zeigen Sie, dass $(0,0)$ ein Gleichgewichtspunkt und sogar der einzige Gleichgewichtspunkt ist.

b) Entscheiden Sie, ob der Gleichgewichtspunkt $(0,0)$ instabil, stabil oder asymptotisch stabil ist.

6. Aufgabe

10 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind **wahr**, und welche sind **falsch**?
(Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte, für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen, keine Antwort gibt 0 Punkte. Bei negativer Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit 0 Punkten gewertet. Es sind keine Begründungen notwendig.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihrem Arbeitsblatt!

a) Es gibt eine lineare DGL 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die die allgemeine Lösung $C_1 + C_2x^2 + C_3x^4,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$ besitzt.

b) Die Funktionen $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ sind Lösungen einer linearen DGL 2. Ordnung, die für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

c) Ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ beschränkt, so existiert ihre Laplacetransformierte $\mathcal{L}[f]$.

d) Jede stetige und differenzierbare Funktion $g\colon]1,2[\to \mathbb{R}$ lässt sich in eine Sinus-Fourierreihe entwickeln.

e) Das reelle Randwertsproblem $y''(x) = 0, y(0) = a, y(1) = b$ ist für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ eindeutig lösbar.