**Musterlösung — DGL f. Ing., 28. Februar 2011**

## 1. Aufgabe

10+1 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 8 \\ -1 & -1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= (3-\lambda)(-1-\lambda)(-3-\lambda) - 4(-3-\lambda)(-1) \\ &= (-3-\lambda)\big((3-\lambda)(-1-\lambda)+4\big) \\ &= (-3-\lambda)\big(\lambda^2-2\lambda+1) \\ &= (-3-\lambda)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Eigenraum zum Eigenwert $-3$ ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Eigenraum zum Eigenwert 1 ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Dieser Eigenraum besitzt nur Dimension 1, folglich ist ein Hauptvektor $h$ zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$h = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Damit können wir die allgemeine Lösung anschreiben:

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{t} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

## 2. Aufgabe

10+1 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$s^2 X + sX - 6X = 30\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s+1}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{30\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)(s^2+s-6)} \\ &= \frac{30\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)(s+3)(s-2)} \quad . \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung (mit Zuhaltemethode)

$$\frac{30}{(s+1)(s+3)(s-2)} = -\frac{5}{s+1} + \frac{3}{s+3} + \frac{2}{s-2}$$

und Rücktransformation:

$$\begin{aligned} \frac{30\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)(s+3)(s-2)} &= \mathrm{e}^{-s}\left(-\frac{5}{s+1} + \frac{3}{s+3} + \frac{2}{s-2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}\left[-5\mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{-3t} + 2\mathrm{e}^{2t}\right](s) \\ &= \mathcal{L}\left[u_1(t)(-5\mathrm{e}^{-(t-1)} + 3\mathrm{e}^{-3(t-1)} + 2\mathrm{e}^{2(t-1)})\right](s) \\ x(t) &= u_1(t)\left(-5\mathrm{e}^{-(t-1)} + 3\mathrm{e}^{-3(t-1)} + 2\mathrm{e}^{2(t-1)}\right) \end{aligned}$$

## 3. Aufgabe

10+1 Punkte

a) $u(x,t) = X(x)T(t) \implies X''(x)T(t) - X(x)T'(t) + X(x)T(t) = 0$
Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = -1 + \frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in $X$ und $T$:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) - (1+\lambda)T(t) = 0.$$

Die Lösung für $T$ lautet:

$$T(t) = T(0)\mathrm{e}^{(1+\lambda)t}.$$

Nicht-konstante, in $x$ periodische Lösungen kann es nur für $\lambda < 0$ geben.
Es ist dann$X(x) = c_4 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_5 \sin\sqrt{-\lambda}x$.
Die Randbedingung ist eine Bedingung für $X(x)$:

$$X'(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0.$$

Es folgt $X'(0) = X'(\pi) = 0$. Mit $X'(x) = \sqrt{-\lambda}(-c_4 \sin\sqrt{-\lambda}x + c_5 \cos\sqrt{-\lambda}x)$ folgt $c_5 = 0$.
$c_4 \neq 0$ und damit $u(x,t) \neq 0$ nur möglich, wenn $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$,
wenn es also ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, gibt mit $\lambda = -n^2$.
Dann sind $X(x) = c_4 \cos\sqrt{-\lambda}x$
und schließlich $T(t) = T(0)\mathrm{e}^{(1-n^2)t}$.
Man hat als nicht-konstante periodische
Lösungen mit $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ die reellen Linearkombinationen der Funktionen $\mathrm{e}^{-(n^2-1)t}\cos nx$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-(n^2-1)t}\cos nx, \quad C_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

b) Zur Erfüllung von $u(x,0) = 2\cos 3x$ Superposition der $u_n(x,t)$: Zahlen $C_n$ aufsuchen mit

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx = 2\cos 3x$$

Es folgt

$$C_3 = 2, \qquad C_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \notin \{3\}.$$

Somit ist eine Lösung des RWP

$$u(x,t) = 2\mathrm{e}^{-8t}\cos 3x$$

## 4. Aufgabe

10+1 Punkte

Im Sinne des EES im Skript ist $G(x,y) = y^2 \sin x$. $G$ ist im Punkt $(0,1)$ (und sogar überall in $\mathbb{R}^2$) stetig differenzierbar. Damit gibt es genau eine Lösung des AWP.

Ermittlung der Lösung durch Trennung der Veränderlichen für Stellen $x$ mit $y(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} y' - y^2 \sin x &= 0 \\ y^2 \sin x &= y' \\ \sin x &= \frac{y'}{y^2} \\ -\cos x + C &= -\frac{1}{y} \qquad C \in \mathbb{R} \\ \cos x - C &= \frac{1}{y} \qquad C \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\cos x - C} &= y \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Anpassen an $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-C} &= \frac{1}{2} \qquad C \in \mathbb{R} \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Man findet also unter der Voraussetzung $y(x) \neq 0$ die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{1+\cos x}.$$

Die der Anfangsstelle 0 nächstliegenden Nullstellen des Nenners sind $-\pi$ und $\pi$, damit ist der Definitionsbereich der Lösung gleich $]-\pi, \pi[$.

## 5. Aufgabe

10+1 Punkte

a) Durch Einsetzen findet man in der Tat

$$\dot{x} = -0\mathrm{e}^{-0} = 0, \quad \dot{y} = 0 - 0\mathrm{e}^{-0} = 0.$$

Die Einzigkeit findet man durch wechselseitiges Einsetzen der beiden Gleichungen. Oder: Indem man die Gleichungen als lineares Gleichungssystem ansieht, durch Untersuchung der Determinante:

$$\begin{vmatrix} -\mathrm{e}^{-y} & 0 \\ 1 & -\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-(x+y)} \neq 0.$$

Damit bleibt nur $x = y = 0$.

b) Für die Jacobimatrix hat man

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-y} & x\mathrm{e}^{-y} \\ 1 - y\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \implies \mathcal{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bei einer Dreiecksmatrix sind die Eigenwerte auf der Diagonalen ablesbar: $-1$ ist ein doppelter Eigenwert, damit ist $(0, 0)$ asymptotisch stabil.

## 6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.

Es müsste 0 eine dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein; dann aber fehlt $x$, und $x^4$ ist zuviel.

b) Falsch.

Die Wronski-Determinante $-\sin 2x$ ist in $\mathbb{R}$ weder identisch gleich Null noch stets von Null verschieden.

c) Wahr.

Wenn $f$ beschränkt ist, ist sie erst recht von exponentieller Ordnung und erfüllt die „Generalvoraussetzung“ lt. Skript.

d) Wahr.

Es gibt eine stückweise stetige, ungerade Funktion $\tilde{g}$ mit Periode 2, die in $]1, 2[$ mit $g$ übereinstimmt. An jeder Stelle $x \in ]1, 2[$ ist die Sinus-Fourierreihe von $\tilde{g}$ gleich dem Wert von $g$.

e) Wahr.

Die allgemeine Lösung ist $y(x) = Cx + D,\ C, D \in \mathbb{R}$; hier ist $x(b - a) + a$ eine (sogar: die) Lösung.