Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 10/11
Prof. Dr. G. Bärwolff 6. April 2011

April – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 65 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Zur Benotung der Klausur wird von 60 erreichbaren Punkten ausgegangen.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10+1 Punkte

Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}$ des Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

2. Aufgabe 10+1 Punkte

Ermitteln Sie die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 4x(t) = \delta_1(t), \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Dabei ist $\delta_1(t)$ die an der Stelle 1 konzentrierte δ-Funktion.

3. Aufgabe 10+1 Punkte

Gegeben ist das reelle Randwertsproblem in $u(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 25u(x,y) = 0,$$
$$u(0,y) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \qquad u(x,0) = 2\sin 3x.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Produktansatzes alle nicht-konstanten Lösungen $u(x, y)$, die in x und y periodisch sind.

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe 10+1 Punkte

Von der reellen Differentialgleichung (DGL)

$$y''' + y'' + 4y' + 4 = 10e^x$$

ist bekannt, dass $\sin 2x$ eine homogene Lösung ist.

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle homogene Lösung y_{hom} dieser DGL.

b) Ermitteln Sie mit dem *Ansatz der rechten Seite* diejenige Lösung y der DGL, welche die Bedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 6$ erfüllt.

5. Aufgabe 10+1 Punkte

Berechnen Sie die beiden Integrale, indem Sie die Laplacetransformation geeignet einsetzen:

$$\text{a)} \int_0^1 (1-\tau)^3 \tau^2 \, d\tau, \qquad \text{b)} \int_0^t J_0'(\tau) J_0(t-\tau) \, d\tau.$$

Hinweis: Es gilt $J_0(0) = 0$ und $\mathcal{L}[J_0](s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.

6. Aufgabe 10 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind **wahr**, und welche sind **falsch**?
(Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte, Jede falsche und jede fehlende Antwort gibt 0 Punkte. Es sind keine Begründungen notwendig.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihrem Arbeitsblatt!

a) Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $y\colon]-1, 1[\to \mathbb{R}$, welches das Anfangswertsproblem $e^{y'} = 1 + y^2$, $y(0) = 2$ löst.

b) Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängige Lösungen einer linearen DGL 2. Ordnung, so ist der Term $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ stets von Null verschieden.

c) Jede stetige periodische Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ besitzt eine Laplacetransformierte $\mathcal{L}[f]$.

d) Für jede konstante Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und jeden konstanten Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ hat das durch $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$ beschriebene dynamische System mindestens einen Gleichgewichtspunkt.

e) Die Bessel-Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung.