Musterlösung — DGL f. Ing., 6. April 2011

1. Aufgabe

10+1 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ 8 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \implies \; 0 &= (4-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda) - 4(-1)(-2-\lambda) \\ &= (-2-\lambda)\big((4-\lambda)(-\lambda)+4\big) \\ &= (-2-\lambda)\big(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &= (-2-\lambda)(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Eigenraum zum Eigenwert -2 ergibt sich als Raum der Lösungen $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Eigenraum zum Eigenwert 2 ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & -4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
Dieser Eigenraum besitzt nur Dimension 1, folglich ist ein Hauptvektor h zum Eigenwert 2 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & -4 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schaut man auf die 2. Spalte der Systemmatrix, so rät man schnell eine inhomogene Lösung:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Damit können wir die allgemeine Lösung anschreiben:

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

2. Aufgabe

10+1 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned}(s^2X - s) + 4(sX - 1) + 4X &= \mathrm{e}^{-s}\\ (s^2 + 4s + 4)X - s - 4 &= \mathrm{e}^{-s}\\ (s^2 + 4s + 4)X &= s + 4 + \mathrm{e}^{-s}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{s+4}{s^2+4s+4)} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2+4s+4}\\ &= \frac{s+4}{(s+2)^2} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{(s+2)^2} \quad .\end{aligned}$$

Geschicktes Zerlegen:

$$\frac{s+4}{(s+2)^2} = \frac{(s+2)+2}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

Oder Partialbruchzerlegung

$$\frac{s+4}{(s+2)^2} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{(s+2)^2}$$

$$\text{Zuhaltemethode: } A_2 = 2,$$

$$s = -1 \text{ betrachten: } 4 \overset{!}{=} A_1 + 2 \implies A_1 = 2$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{(s+2)^2} &= \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-2t} + 2t\mathrm{e}^{-2t} + u_1(t)(t-1)\mathrm{e}^{-2(t-1)}\right](s)\\ x(t) &= \mathrm{e}^{-2t} + 2t\mathrm{e}^{-2t} + u_1(t)(t-1)\mathrm{e}^{-2(t-1)}\end{aligned}$$

3. Aufgabe

10+1 Punkte

$u(x,y) = X(x)Y(y) \implies X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + 25X(x)Y(y) = 0$
Für $u(x,y) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)Y(y)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + 25 = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = -25 - \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Kleine Umformung wg. Vorzeichens

$$\lambda = -25 - \frac{Y''}{Y} \implies 25 + \lambda = -\frac{Y''}{Y} \implies (25+\lambda)Y = -Y'' \implies Y'' + (25+\lambda)Y = 0.$$

DGLn in X und Y:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad Y''(y) + (25+\lambda)Y(y) = 0.$$

Nicht-konstante, in x und in y periodische Lösungen kann es nur für $-25 < \lambda < 0$ geben.

Es ist dann

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x,$$
$$Y(y) = c_3 \cos\sqrt{\lambda+25}y + c_4 \sin\sqrt{\lambda+25}y$$

Homogene Randbedingungen liefern:

$$X(0)Y(y) = 0, \quad X(x)Y'(0) = 0 \implies X(0) = 0, \quad Y'(0) = 0 \implies c_1 = 0, \quad c_4 = 0$$

Die inhomogene Randbedingung legt bereits alles fest: Mit der Superposition

$$u(x,y) = \sum_\lambda C_\lambda \sin\sqrt{-\lambda}x \cos\sqrt{\lambda+25}y$$

ist

$$u(x,0) = \sum_\lambda C_\lambda \sin\sqrt{-\lambda}x = 2\sin 3x$$
$$\implies \lambda = -9, C_\lambda = 2.$$

Damit lautet die gesuchte Lösung

$$u(x,y) = 2\sin 3x \cos 4y$$

4. Aufgabe

10+1 Punkte

a) (Per Ansage wurde die DGL zu $y''' + y'' + 4y' + 4y = 10\mathrm{e}^x$ korrigiert.)

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^3+\lambda^2+4\lambda+4$. Da $\sin 2x$ eine homogene Lösung ist und die DGL reell ist, ist auch $\cos 2x$ eine homogene Lösung. Die Zahlen $\pm 2\mathrm{i}$ sind somit Nullstellen des charakteristischen Polynoms, das sich also durch $\lambda^2 + 4$ ohne Rest teilen lässt:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda^2 + 4)(\lambda + 1)$$

-1 ist eine weitere Nullstelle, entsprechend e^{-x} eine weitere, linear unabhängige Lösung: Die allgemeine homogene Lösung y_{hom} ist damit

$$y_{\text{hom}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \mathrm{e}^{-x}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Wegen des „1" in der Inhomogenität e^x liegt keine Resonanz vor; ein Ansatz für eine partikuläre Lösung y_{p} ist

$$y_{\mathrm{p}}(x) = A\mathrm{e}^x, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

In die DGL eingesetzt:

$$A\mathrm{e}^x + A\mathrm{e}^x + 4A\mathrm{e}^x + 4A\mathrm{e}^x = 10\mathrm{e}^x \implies 10A\mathrm{e}^x = 10\mathrm{e}^x \implies A = 1.$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist

$$y(x) = \mathrm{e}^x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \mathrm{e}^{-x}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Für die Anfangswerte ist

$$y(0) = 1+C_1+C_3 = 1, \qquad y'(0) = 1+2C_2-C_3 = 0, \qquad y''(0) = 1-4C_1+C_3 = 6,$$

also

$$C_3 = -C_1 \implies -5C_1 = 5 \implies C_1 = -1 \implies C_3 = 1 \implies C_2 = 0.$$

Die gesuchte Lösung ist

$$y(x) = \mathrm{e}^x - \cos 2x + \mathrm{e}^{-x}$$

5. Aufgabe

10+1 Punkte

a) Es ist

$$\int_0^1 (1-\tau)^3\tau^2 \,\mathrm{d}t = (t^3 * t^2)\big|_{t=1}.$$

Mit

$$\mathcal{L}[t^3 * t^2](s) = \mathcal{L}[t^3](s)\cdot\mathcal{L}[t^2](s) = \frac{3!}{s^4}\cdot\frac{2!}{s^3} = \frac{12}{s^7} = \frac{12}{6!}\cdot\frac{6!}{s^7} = \frac{1}{60}\mathcal{L}[t^6](s)$$

ist

$$(t^3 * t^2)\big|_{t=1} = \frac{1}{60}t^6\big|_{t=1} = \frac{1}{60}.$$

b) Es ist

$$\int_0^t J_0'(\tau)J_0(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = J_0'(t) * J_0(t).$$

Damit ist mit der Laplace-Tabelle und der Angabe $J_0(0) = 0$:

$$\mathcal{L}[J_0'(t) * J_0(t)](s) = \left(s\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}[\cos t](s).$$

Somit gilt

$$\int_0^t J_0'(\tau)J_0(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \cos t.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.

Mit $y' = \ln(1+y^2)$ sichert EES Eindeutigkeit auf ganz $\mathbb{R}^2$..

b) Wahr.

Diese Aussage ist die Grundlage des Wronski-Tests.

c) Wahr.

Stetige periodische Funktionen sind beschränkt und erfüllen damit die Generalvoraussetzung.

d) Falsch.

Man wählt $A, \vec{b}$ so, dass das inhomogene GLS $A\vec{x}^* = -\vec{b}$ unlösbar wird.

e) Wahr.

Dass die Koeffizientenfunktionen nicht-linear sind, spielt keine Rolle.