****

Technische Universität Berlin SS 2010

Fakultät II Mathematik und Naturwissenschaften 19.07.2010

Doz.: StR.i.H. A.Gündel-vom Hofe Ass.:P.Zito

****

Juli-Klausur (Verständnisteil)
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen sowie die Laplacetabelle aus dem Netz zugelassen. Taschenrechner sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine kurze Begründung an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

a) Alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ sind von der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$.

b) Sei A eine 2×2 Matrix mit reellen Koeffizienten. Aus $\det A > 0$ folgt, dass $\vec{x}_0 = \mathbf{0}$ kein stabiler Gleichgewichtspunkt der DGL $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ist.

c) Sei das autonome DGL-System $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ gegeben mit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Seien $\vec{y}_1(t),\ \vec{y}_2(t)$ zwei stetig differenzierbare, für alle $t \in \mathbb{R}$ definierte und linear unabhängige reelle Lösungen, dann ist jede Lösung des DGL-Systems eine Linearkombination aus $\vec{y}_1(t)$ und $\vec{y}_2(t)$ ist.

d) Gegeben sei die DGL $y'' + a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$, wobei $a(x),\ b(x),\ c(x)$ stetig differenzierbar sind. Dann ist die Lösung zum AWP $y(0) = 1$ eindeutig bestimmt.

e) Sei $g(t)$ gegeben, so dass $\int_0^t g(t-\mu)f(\mu)\,d\mu = f(t)$ für alle stetigen Funktionen $f(t)$. Dann ist die Laplacetransformierte von $g(t)$ die konstante Funktion 1.

2. Aufgabe

12 Punkte

a) Geben Sie eine lineare, homogene Differentialgleichung mit konstanten, reellen Koeffizienten an, die die Lösung $y_1(t) = te^t \cos(t)$ hat.

Wählen Sie die Ordnung der Differentialgleichung so niedrig wie möglich. Begründen Sie Ihre Wahl der Ordnung.

(4 Punkte)

b) Geben Sie ein Fundamentalsystem (d.h. eine Lösungsbasis) zu dieser DGL an.

(4 Punkte)

c) Wie muss der Ansatz vom Typ der rechten Seite gewählt werden, wenn die DGL zusätzlich folgende Inhomogenität hat:

1. $b(t) = e^t$
2. $b(t) = e^t \sin(t)$

(4 Punkte)

3. Aufgabe

10 Punkte

Sei $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Lösung des Anfangwertsproblems

$$y'' + \int_0^t y'(t-\mu)e^{\mu}\, d\mu = u(t)$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. Hier bezeichnet $u(t)$ die Heaviside-Sprungfunktion. Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $\mathrm{L}[y](s)$ von y. Die Rücktransformation, d.h. die Bestimmung von y selbst, ist nicht verlangt.

4. Aufgabe

8 Punkte

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{x}} = A_\alpha \vec{x}$$

mit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche α ist die Gleichgewichtslösung $\vec{x}(t) = \mathbf{0}$ stabil, für welche α asymptotisch stabil, für welche α instabil?

(5 Punkte)

b) Welches der folgenden Phasendiagramme entspricht den Fall $\alpha = 0$?

(3 Punkte)