Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2010
StR.i.H. A. Gündel-vom Hofe 12. Oktober 2010

Oktober – Klausur (Rechenteil)
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Falls Ihr Studiengang 40% Hausaufgaben fordert:
In welchem Semester haben Sie die erreicht? ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sowie einem Formelblatt zur Laplacetransformation sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung für die Funktion $y = y(x)$:

$$(*) \quad y' = 2x \cdot (\, y + y^2)$$

a) Zeigen Sie: $(*)$ ist für jede Anfangswertvorgabe $y(0) = y_0$ eindeutig lösbar und besitzt für genau zwei Werte $y_0 \in \mathbb{R}$ eine stationäre (d.h. konstante) Lösung.

b) Berechnen Sie die eindeutige Lösung $y(x)$ zu $(*)$ mit $y(0) = 1$.

c) Zeigen Sie, dass sich durch die Substitution $z = \frac{1}{y}$ die DGL $(*)$ in eine inhomogene *lineare* DGL der Form

$$(**) \; z' + a(x)\, z = b(x)$$

überführen lässt. Wie lauten die Koeffizienten(funktionen) $a(x)$, $b(x)$ konkret?
(Hinweis: Die Lösung der linearen DGL soll nicht(!) berechnet werden.)

2. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $(*) \;\; \dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine homogene Lösung $\vec{x}_H(t)$ zum System $(*)$.

b) Ermitteln Sie mithilfe der Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung $\vec{x}_P(t)$ für das System.

c) Wie lautet die eindeutige Lösung zu $(*)$ mit $\vec{x}(0) = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

3. Aufgabe

8 Punkte

Bezeichne $u_a(t) = u_0(t-a) = \begin{cases} 0 & : \; t < a \\ 1 & : \; t \geq a \end{cases}$ die Heaviside-Funktion zu $a \geq 0$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der stückweise stetigen Funktion

$$h(t) = u_1(t) - 2u_2(t) + 3u_4(t) - 2u_5(t)\,.$$

b) Berechnen Sie die Bildfunktion $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ zur Lösung $y(t)$ des folgenden Anfangswertproblems (AWP) bezüglich der Laplacetransformation:

$$(*) \;\; y''(t) - 2\,y'(t) + 2\,y(t) = h(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

c) Bestimmen Sie die Greensche Funktion $g(t-\tau)$, mithilfe derer sich die Lösung $y(t)$ zum AWP $(*)$ darstellen lässt als

$$y(t) = (g * h)(t) = \int_0^t g(t-\tau)h(\tau)\, d\tau \,.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie mit Hilfe des Produktansatzes (Separationsansatzes) die allgemeine Lösung für das folgende Randwertproblem (RWP) bei beliebig vorgegebenen Anfangswerten:

$$u_{tt}(x,t) - 4\; u_{xx}(x,t) = 0\,, \quad u(0,t) = u_x(\frac{\pi}{2},t) \equiv 0 \quad \text{für} \quad t > 0\,.$$