# Technische Universität Berlin

**Fakultät II – Institut für Mathematik** SS 2010
**StR.i.H. A. Gündel-vom Hofe** 12. Oktober 2010

## Oktober – Klausur (Verständnisteil)
## Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: ............................ Vorname: ............................

Matr.–Nr.: ......................... Studiengang: .........................

---

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sowie einem Formelblatt zur Laplacetransformation sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

---

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

---

**Korrektur**

| 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

## 1. Aufgabe
8 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an. (Antworten ohne Begründung bringen keine Punkte.)

a) Das zur linearen DGL (*) $y'' - 3y' + y = t^2 + 1$ gehörende *autonome* DGL-System 1. Ordnung ist ein lineares DGL-System.

b) Sind $y_1(t), y_2(t)$ zwei in einer Umgebung von $t_0 = 1$ definierte reelle Lösungen einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit $y_1(1) \cdot y_2{}'(1) \neq y_1{}'(1) \cdot y_2(1)$, so bildet $\{y_1(t), y_2(t)\}$ ein reelles Fundamentalsystem im Lösungsraum dieser DGL.

c) Ist $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ mit fest gewähltem $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Matrix sowie $\vec{v}$ ein Eigenvektor zu $A$ und $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor mit $(A - \alpha I)\,\vec{u} = \vec{v}$, so ist $\vec{x}(t) = e^{\alpha t}\,(\vec{v} + t\vec{u})$ eine Lösung des homogenen DGL-Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

d) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $B \supset [0, L] \times [0, \infty[$ und sei $\mathcal{C}(B)$ die Menge der auf $B$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen. Dann bildet die Menge der Lösungsfunktionen $u(x,t)$ der PDG

$$(*)\; u_{tt}(x,t) = 4 \cdot u_{xx}(x,t) - u(x,t), \quad 0 \leq x \leq L,\; t \geq 0$$

mit den Randbedingungen $u(0,t) \equiv 0,\; u(L,t) \equiv 1$ einen Unterraum zu $\mathcal{C}(B)$.

## 2. Aufgabe
10 Punkte

Finden Sie unter Zuhilfenahme der $\mathcal{L}$-Transformation alle stetigen Funktionen $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, welche für fest gegebenes $a \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung erfüllen:

$$(f * f)(t) = \frac{1}{6}\, t^3\, e^{-a\,t}$$

Geben Sie dabei alle verwendeten Sätze bezüglich der $\mathcal{L}$-Transformation an.

## 3. Aufgabe
11 Punkte

Gegeben seien die beiden Funktionen $y_1(t) = t$ und $y_2(t) = sin(2t)$.

a) Bestimmen Sie die *explizite* homogene lineare DGL kleinstmöglicher Ordnung, für welche die beiden Funktionen Lösungen sind.

b) Geben Sie ein Fundamentalsystem für die in (a) gefundene DGL an, und weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebenen Fundamentallösungen wirklich linear unabhängig sind.

c) Angenommen, die lineare DGL aus (a) besitzt einen Störterm der Gestalt

$$(i)\; b(t) = t^2 - 1 \quad \text{bzw.} \quad (ii)\; b(t) = cos(2t).$$

Welcher Ansatz muss in jedem der beiden Fälle für die Ermittlung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL gewählt werden, um ans Ziel zu kommen? Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

## 4. Aufgabe

11 Punkte

Bestimmen Sie für das folgende nichtlineare DGL-System sämtliche Gleichgewichtspunkte und klassifizieren Sie diese entsprechend dem Stabilitätsverhalten des Systems an diesen stationären Punkten:

$$\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x^2 y + y \\ 3\,x^2 - xy \end{pmatrix}$$