**Musterlösung — DGL f. Ing., 18. Juli 2011**

## 1. Aufgabe

10 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 0 \\ 8 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad 0 &= (6-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) - 4(-1)(-\lambda) \\ &= (-\lambda)\big((6-\lambda)(2-\lambda)+4\big) \\ &= (-\lambda)\big(\lambda^2 - 8\lambda + 16) \\ &= -\lambda(\lambda-4)^2 \end{aligned}$$

ergeben sich der einfache Eigenwert 0 und der doppelte Eigenwert 4.

Eigenraum zum Eigenwert 0 ergibt sich als Raum der Lösungen $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu span $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Eigenraum zum Eigenwert 4 ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & -4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Dieser Eigenraum besitzt nur Dimension 1, folglich ist ein weiterer Hauptvektor $h$ zum Eigenwert 4 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & -4 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schaut man auf die 2. Spalte der Systemmatrix, so rät man schnell eine inhomogene Lösung:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Damit können wir die allgemeine Lösung anschreiben:

$$\vec{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{4t} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

## 2. Aufgabe

10 Punkte

Es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[4tu_1(t)](s) &= 4\mathcal{L}\left[\big((t-1)+1\big)u_1(t)\right](s)\\ = 4\mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}[t+1](s) &= 4\mathrm{e}^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right) = 4\mathrm{e}^{-s}\frac{s+1}{s^2}.\end{aligned}$$

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned}(s^2X - s + 1) + 3(sX - 1) + 2X &= 4\mathrm{e}^{-s}\frac{s+1}{s^2}\\ (s^2+3s+2)X - s - 2 &= 4\mathrm{e}^{-s}\frac{s+1}{s^2}.\\ (s^2+3s+2)X &= s+2+4\mathrm{e}^{-s}\frac{s+1}{s^2}\\ (s+1)(s+2)X &= s+2+4\mathrm{e}^{-s}\frac{s+1}{s^2}.\\ X(s) &= \frac{1}{s+1}+\frac{4\mathrm{e}^{-s}}{s^2(s+2)} \qquad .\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4}{s^2(s+2)}) = \frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s^2}+\frac{D}{s+2}$$

$$\text{Zuhaltemethode: } C_2 = 2,\ D = 1$$

$$s = -1 \text{ setzen} : 4 = -C_1 + C_2 + D = -C_1 + 3 \implies C_1 = -1$$

$$\frac{4}{s^2(s+2)}) = -\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s+2}$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s+1}+\mathrm{e}^{-s}\left(-\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s+2}\right)\\ &= \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-t}+u_1(t)\left(-1+2(t-1)+\mathrm{e}^{-2(t-1)}\right)\right](s)\\ x(t) &= \mathrm{e}^{-t}+u_1(t)\left(-1+2(t-1)+\mathrm{e}^{-2(t-1)}\right)\end{aligned}$$

## 3. Aufgabe

10 Punkte

$y(x,t) = X(x)T(t) \implies X''(x)T(t) - \frac{1}{9}X(x)T''(t) = 0$
Für $y(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{1}{9}\frac{T''(t)}{T(t)} = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = \frac{1}{9}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

DGLn in $X$ und $T$:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T''(t) - 9\lambda T(t) = 0.$$

Nicht-konstante, in $x$ und in $t$ periodische Lösungen kann es nur für $\lambda < 0$ geben.

Es ist dann

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x, \\ T(t) &= c_3 \cos 3\sqrt{-\lambda}t + c_4 \sin 3\sqrt{-\lambda}t \end{aligned}$$

Homogene Rand- und Anfangsbedingungen liefern:

$$\begin{aligned} X(0)T(t) = 0, \quad X(\pi)T(t) = 0, \quad X(x)T'(0) = 0 \\ \implies X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0, \quad T'(0) = 0 \\ \implies c_1 = 0, \quad \sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0, \quad c_4 = 0. \end{aligned}$$

$\lambda$ ist eine der Zahlen $\lambda_n$ mit

$$\lambda_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Mit der Superposition

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx \cos 3nt$$

ist

$$y(x,0) = \sum_{n=1} C_n \sin nx = 3\sin 2x + 5\sin 4x$$
$$\implies C_2 = 3,\ C_4 = 5,\ C_k = 0 \text{ für } k = 1,3 \text{ oder } k \geq 5.$$

Damit lautet die gesuchte Lösung

$$y(x,y) = 3\sin 2x\cos 6t + 5\sin 4x \cos 12t.$$

## 4. Aufgabe

8 Punkte

a) Es ist

$$y' = \mathrm{e}^{1-x-y}.$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist die rechte Seite stetig nach $x$ und $y$ differenzierbar, damit existiert nach dem EES genau eine Lösung des AWPs.

b) Mit TdV ergibt sich

$$\begin{aligned} y'\mathrm{e}^{y} &= \mathrm{e}^{1-x} \\ \mathrm{e}^{y} &= -\mathrm{e}^{1-x} + C, \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aus $y(1) = 0$ folgt $C = 2$. Damit ist

$$y = \ln(2 - \mathrm{e}^{1-x}).$$

Der maximale Definitionsbereich wird durch die Ungleichung $2 - \mathrm{e}^{1-x} > 0$ bestimmt:

$$\begin{aligned} 2 - \mathrm{e}^{1-x} &> 0 \\ \ln 2 &> 1 - x \\ x &> 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

Die Lösung des AWPs ist somit durch

$$y \colon ]1 - \ln 2, \infty[ \to \mathbb{R}\,, x \mapsto -\ln(2 - \mathrm{e}^{1-x})$$

gegeben.

## 5. Aufgabe

12 Punkte

a) Die stationären Lösungen seien mit $(x^*, y^*)$ bezeichnet.
Aus $0 = -x^*(1 - y^*)$, $\quad 0 = -y^*(1 - x^*)$ folgt $(x^*(t), y^*(t)) = (0, 0)$ oder $(x^*(t), y^*(t)) = (1, 1)$.

Für die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}(x, y)$ hat man

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} -(1-y) & x \\ y & -(1-x) \end{pmatrix}.$$

An den beiden Gleichgewichtspunkten gilt also

$$\mathcal{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{J}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathcal{J}(0, 0)$ ist diagonal und hat den Eigenwert $-1$, der GWP $(0, 0)$ ist damit asymptotisch stabil.
Die Matrix $\mathcal{J}(1, 1)$ hat die Eigenwerte $1$ und $-1$, der GWP $(1, 1)$ ist damit instabil.

b) Es ist

$$\begin{aligned} x'(y) &= \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{x(1-y)}{y(1-x)} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-y}{y} \\ \int \frac{1-x}{x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1-y}{y}\mathrm{d}y \\ \ln x - x &= \ln y - y + C \\ C &= \ln x - \ln y - x + y. \end{aligned}$$

Man setzt also

$$E(x,y) := \ln x - \ln y - x + y.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \dot{E} = E_x\dot{x} + E_y\dot{y} &= \left(\frac{1}{x} - 1\right)(-x(1-y)) + \left(-\frac{1}{y} + 1\right)(-y(1-x)) \\ &= (-1+x)(1-y) + (1-y)(1-x) = 0. \end{aligned}$$

## 6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.
Mit $G(x,y) = \ln(1-y)$ findet man, dass der Punkt $(0,2)$ nicht einmal im Definitionsbereich von $G$ liegt.

b) Falsch.
Die Wronski-Determinante ist gleich $x^4$ und verschwindet genau an der Stelle 0 im Widerspruch zum Satz von Wronski, demzufolge die Wronski-Determinante von Lösungen einer linearen DGL entweder immer verschwindet oder niemals. Damit können $x^2$ und $x^3$ keine Lösungen einer linearen homogenen DGL 2. Ordnung sein.

c) Falsch.
$t^2$ und die Funktion $f$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von Lerch und sind stetig. Aus $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[t^2]$ folgt daher $f(t) = t^2$. Diese Funktion $f$ ist aber nicht beschränkt.

d) Falsch.
Alle Gleichgewichtspunkte des dynamischen Systems $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ sind stabil.

e) Falsch.
Für $n \geq 3$ ist die Funktion $x^n - y^n$ keine Lösung der Laplacegleichung.