Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 11

Prof. Dr. D. Hömberg 18. Juli 2011

Juli – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}$ des Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Ermitteln Sie die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4tu_1(t), \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1.$$

Dabei ist $u_1(t) = 0$ für $t \leq 1$ und $u_1(t) = 1$ für $t > 1$.

3. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben ist das reelle Randanfangswertsproblem in $y(x,t)$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{9}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$y(0,t) = y(\pi,t) = 0, \qquad y(x,0) = 3\sin 2x + 5\sin 4x, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Verwenden Sie den Produktansatz und suchen Sie gezielt nicht-konstante Lösungen $y(x,t)$ auf, die in x und t periodisch sind.

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe
8 Punkte

Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ das Anfangswertsproblem (AWP)

$$\ln y' = 1 - x - y, \quad y(1) = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass dieses AWP eindeutig lösbar ist.

b) Ermitteln Sie die Lösung zusammen mit ihrem maximalen Definitionsbereich.

5. Aufgabe
12 Punkte

Ein nichtlineares dynamisches System werde durch zwei Größen $x(t)$ und $y(t)$ zusammen mit dem DGL-System

$$\dot{x} = -x(1-y), \quad \dot{y} = -y(1-x) \tag{†}$$

beschrieben.

a) Ermitteln Sie die stationären Lösungen und deren Stabilitätscharakter.

b) Finden Sie eine von x und y abhängige Erhaltungsgröße $E(x, y)$ und zeigen Sie dann durch Nachrechnen, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E\big(x(t), y(t)\big) = 0$ für Lösungen $(x(t), y(t))$ des DGL-Systems (†) gilt.

6. Aufgabe
10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Das Anfangswertsproblem $y' = \ln(1-y)$, $y(0) = 2$ ist unlösbar.

b) Es gibt eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, die die Funktionen x^2 und x^3 als Lösungen hat.

c) Es gibt eine stetige und beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, die die gleiche Laplacetransformierte wie die Funktion t^2 hat.

d) Hat ein lineares dynamisches System mehrere Gleichgewichtspunkte, so ist hiervon mindestens einer instabil.

e) Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion $w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, w(x, y) = x^n - y^n$ eine Lösung der Laplacegleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} = 0$.