Musterlösung — DGL f. Ing., 12. Oktober 2011

1. Aufgabe

11 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 8 \\ -1 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= (5-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - 4(-1-\lambda)(-1) \\ &= (-1-\lambda)\big((5-\lambda)(1-\lambda)+4\big) \\ &= (-1-\lambda)\big(\lambda^2 - 6\lambda + 9) \\ &= (-1-\lambda)(\lambda-3)^2 \end{aligned}$$

ergeben sich der einfache Eigenwert -1 und der doppelte Eigenwert 3.

Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ergibt sich als Raum der Lösungen $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einige Gauß-Schritte:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Eigenraum ist span $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Der Eigenraum zum Eigenwert 3 ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Dieser Eigenraum besitzt nur Dimension 1, folglich ist ein weiterer Hauptvektor h zum Eigenwert 3 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Blick auf die erste Spalte legt die inhomogene Lösung

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nahe.

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Damit können wir die allgemeine Lösung anschreiben:

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{3t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned} s^2X - 1 + 4sX + 5X &= \mathrm{e}^{-3s} \\ (s^2+4s+5)X &= 1 + \mathrm{e}^{-3s} \\ X &= \frac{1}{s^2+4s+5} + \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{s^2+4s+5} \end{aligned}$$

Das Polynom s^2+$4s$+5 hat komplexe Nullstellen; deshalb quadratische Ergänzung erforderlich.

$$X(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1} + \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{(s+2)^2+1} \qquad .$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s+2)^2+1} + \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{(s+2)^2+1} \\ &= \frac{1}{(s+2)^2+1} + \mathrm{e}^{-3s} \cdot \frac{1}{(s+2)^2+1} \\ &= \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-2t}\sin t\right](s) + \mathrm{e}^{-3s}\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-2t}\sin t\right](s) \\ x(t) &= \mathrm{e}^{-2t}\sin t + u_3(t)\mathrm{e}^{-2(t-3)}\sin(t-3) \end{aligned}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Mit $y(x,t) = X(x)T(t)$ hat man

$$X''(x)T(t) - X(x)T'(t) + X(x)T(t) = 0.$$

Für $y(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = \frac{T'(t)}{T(t)} - 1$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) - (\lambda + 1)T(t) = 0.$$

Nicht-konstante, in x periodische Lösungen kann es nur für $\lambda < 0$ geben. Es ist dann für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^-$

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{-\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{-\lambda} x,$$
$$T(t) = c_4 \mathrm{e}^{(\lambda+1)t}$$

Die Bedingung $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$ bedeutet $X(0) = X(\pi) = 0$. Daraus folgt $c_1 = 0$ sowie $\sin \pi\sqrt{-\lambda} = 0$. Damit ist λ eins der Werte λ_n mit

$$\sqrt{-\lambda_n} = n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N},\, n > 0$$
$$\lambda_n = -n^2$$

Die Funktionen y sind von der Form

$$A_n \mathrm{e}^{(-n^2+1)t} \sin nx, \quad A_n \in \mathbb{R}.$$

b) Mit der Superposition

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{(-n^2+1)t} \sin nx$$

ist

$$y(x,0) = \sum_{n=1} A_n \sin nx = 3 \sin 2x + 5 \sin 4x$$
$$\implies A_2 = 3,\ A_4 = 5,\ A_k = 0 \text{ für } k = 1,3 \text{ oder } k \geq 5.$$

Damit lautet die gesuchte Lösung

$$y(x,y) = 3\mathrm{e}^{-3t} \sin 2x + 5\mathrm{e}^{-15t} \sin 4x.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Der Ansatz e^{rx} führt zu

$$\begin{aligned} (r^2(2x-1) - 4rx + 4)\mathrm{e}^{rx} &= 0 \\ \implies x(2r^2 - 4r) + (4 - r^2) &= 0 \\ \implies r(r-2) = 0 \text{ und } (r-2)(r+2) &= 0 \\ \implies r &= 2 \end{aligned}$$

Es ist e^{2x} eine Lösung der DGL.

Der Ansatz x^s führt zu

$$\begin{aligned} (2x-1)s(s-1)x^{s-2} - 4sx^s + 4x^s &= 0 \\ \implies (-4s+4)x^s + 2s(s-1)x^{s-1} - s(s-1)x^{s-2} &= 0 \\ \implies -4s+4 = 0 \text{ und } s(s-1) = 0 \text{ und } s(s-1) &= 0 \\ \implies s &= 1. \end{aligned}$$

Es ist x eine weitere Lösung der DGL.

Die Lösungen sind linear unabhängig, denn ihre Wronski-Determinante verschwindet nicht überall:

$$\left.\begin{vmatrix} x & \mathrm{e}^{2x} \\ 1 & 2\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix}\right|_{x=0} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Die vorgegebene DGL ist von 2. Ordnung, und wir besitzen zwei linear unabhängige Lösungen. Damit haben wir eine Lösungsbasis gefunden, die aus x und e^{2x} besteht.

5. Aufgabe

10 Punkte

Diese Integralgleichung schreibt sich als

$$tf(t) * f(t) = f(t) * t^3.$$

Im Laplacebereich ergibt sich mit $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$:

$$-F'(s)F(s) = F(s) \cdot \frac{6}{s^4}.$$

Also ist

$$F'(s) = -\frac{6}{s^4},$$

woraus sich ergibt:

$$F(s) = \frac{2}{s^3} + C$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Mit dem Endwert $\lim\limits_{s \to \infty} F(s) = 0$ ist $C = 0$.
Damit ist

$$f(t) = t^2$$

In der Tat ist

$$\int_0^t u \cdot u^2 \cdot (t-u)^2 \, du = \int_0^t u^3 \cdot (t-u)^2 \, du = \int_0^t (t-u)^3 \cdot u^2 \, du = \int_0^t u^2 \cdot (t-u)^3 \, du.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.
Es sei $G(x,y) := \frac{\ln(1+y^2)}{1+x^2}$. G ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und stetig differenzierbar. Damit existiert nach dem EES genau eine Lösung y mit $y(0) = 0$.
Diese Lösung ist $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Falsch.
Man wähle z.B. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine nicht-konstante Lösung der DGL $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

c) Wahr.
Das dynamische System ist linear und hat die Systemmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gibt einen Eigenwert mit positivem Realteil, damit ist der angegebene Gleichgewichtspunkt instabil.

d) Falsch.
Man betrachte für f die konstante Funktion mit dem Wert 1. Diese Funktion ist beschränkt, aber deren Laplacetransformierte $\frac{1}{s}$ nicht.

e) Falsch.
Die konstanten Funktionen $w(x,y) = \tilde{C}$ mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ lösen ebenfalls die PDGL, werden aber nicht
durch die angegebene allgemeine Lösung $w(x,y) = c(x+y)$ mit $c \in \mathbb{R}$ erfasst.