Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 11

Prof. Dr. D. Hömberg 12. Oktober 2011

Oktober – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe
11 Punkte

Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}$ des Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

2. Aufgabe
9 Punkte

Ermitteln Sie die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = \delta_3(t), \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Dabei ist $\delta_3(t)$ die im Zeitpunkt 3 zentrierte Dirac-Funktion.

3. Aufgabe
10 Punkte

Gegeben ist die reelle partielle Differentialgleichung in $y(x, t)$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + y(x,t) = 0.$$

a) Ermitteln Sie alle Lösungen $y(x, t)$ der Form $y(x, t) = X(x)T(t)$, die die Bedingung $y(0, t) = y(\pi, t) = 0$ erfüllen; dabei soll $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sein.

b) Berechnen Sie durch Superposition der in Teil a) gefundenen Lösungen die Lösung y mit

$$y(x, 0) = 3 \sin 2x + 5 \sin 4x.$$

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben ist die reelle lineare Differentialgleichung

$$(2x-1)y'' - 4xy' + 4y = 0, \qquad x > \frac{1}{2}\,.$$

Ermitteln Sie eine Lösungsbasis, indem Sie für y die Ansätze e^{rx} und x^s mit reellen Zahlen r, s verwenden. Weisen Sie dabei die lineare Unabhängigkeit Ihrer gefundenen Lösungen explizit nach.

5. Aufgabe 10 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe des Faltungssatzes eine stetige Lösung $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ von exponentieller Ordnung für die Integralgleichung

$$\int_0^t u\, f(u)\, f(t-u)\ \mathrm{d}u = \int_0^t f(u)\,(t-u)^3\ \mathrm{d}u.$$

Hinweis: Setzen Sie $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$ und verwenden Sie die Aussage $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$.

6. Aufgabe 10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Das reelle Anfangswertsproblem $(1+x^2)y' = \ln(1+y^2),\ y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

b) Für jede lineare Differentialgleichung $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ im $\mathbb{R}^2$ mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt: Hat A einen Eigenwert 0 mit geometrischer Vielfachheit 1, so ist jede Lösung $\vec{x}(t)$ eine konstante Lösung.

c) Für das dynamische System $\dot{\vec{x}} = \vec{x}$ ist der Punkt $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

d) Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ von exponentieller Ordnung gilt: Ist die Laplacetransformierte $\mathcal{L}[f] : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ unbeschränkt, so ist auch die Funktion f unbeschränkt.

e) Die reelle partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ hat die allgemeine Lösung $w(x,y) = c(x+y)$ mit $c \in \mathbb{R}$.