Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 11/12

Dr. J. Fuhrmann 18. Februar 2012

Februar – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

11 Punkte

Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}$ des Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Ermitteln Sie die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) - 3x(t) = 12u_3(t), \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Dabei ist die Sprungfunktion $u_3(t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 3 \\ 1 & \text{für } t > 3. \end{cases}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die reelle partielle Differentialgleichung in $y(x,t)$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 0.$$

a) Ermitteln Sie alle Lösungen $y(x,t)$ der Form $y(x,t) = X(x)T(t)$, die die Bedingung $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$ erfüllen; dabei soll $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sein.

b) Berechnen Sie durch Superposition der in Teil a) gefundenen Lösungen die Lösung y mit

$$y(x,0) = 3\sin 2x + 5\sin 4x.$$

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe

12 Punkte

Ein nichtlineares dynamisches System werde durch zwei Größen $x(t)$ und $y(t)$ zusammen mit dem DGL-System

$$\dot{x} = (x-1)(y-2), \qquad \dot{y} = (x-2)(y-1)$$

beschrieben.

a) Ermitteln Sie die Gleichgewichtspunkte und deren Stabilitätscharakter.

b) Finden Sie mit Hilfe des Summenansatzes $E(x,y) = X(x) + Y(y)$ eine von x und y abhängige Erhaltungsgröße $E(x,y)$.
Hinweis: Es muss gelten

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = X'(x)\dot{x} + Y'(y)\dot{y} = 0.$$

5. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei das Rand-Eigenwert-Problem

$$y'' + 2y' + (1+\lambda)y = 0 \quad (*), \qquad y(0) = y(\pi) = 0 \quad (**).$$

Es sei bekannt, dass für $k = 1, 2, \ldots$ die Funktionen $y_k \colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$y_k(x) := \mathrm{e}^{-x} \sin kx$$

die Eigenlösungen des Rand-Eigenwert-Problems $(*), (**)$ sind.

a) Bringen Sie die DGL $(*)$ in selbstadjungierte Form.

b) Berechnen Sie für die Eigenlösungen y_k die zugehörigen Eigenwerte λ_k.

Hinweise: Die selbstadjungierte Form muss klar zu erkennen sein.
Verwenden Sie die Leibnizsche Regel $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$.

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Das reelle Anfangswertsproblem $y' = x \sin y,\ y(1) = \pi$ ist eindeutig lösbar.

b) Es gibt eine lineare homogene DGL 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die als eine Lösung die Funktion $x \sin x$ hat.

c) Zwei Lösungen einer linearen homogenen, auf ganz $\mathbb{R}$ definierten DGL 2. Ordnung mit stetigen Koeffizientenfunktionen sind genau dann linear abhängig, wenn ihre Wronski-Determinante an irgendeiner Stelle verschwindet.

d) Sind zwei Funktionen $f, g \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ von exponentieller Ordnung, so ist auch das (gewöhnliche) Produkt $f \cdot g$ von exponentieller Ordnung.

e) Es gibt eine komplexe Zahl λ, so dass die Besselfunktion $J_\lambda(x)$ eine nichtverschwindende konstante Funktion ist.