Musterlösung — DGL f. Ing., 18. Februar 2012

1. Aufgabe 11 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 & -8 \\ 1 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= (-3-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - (3-\lambda)(-4) \\ &= (3-\lambda)\big((1-\lambda)(-3-\lambda)+4\big) \\ &= (3-\lambda)\big(\lambda^2+2\lambda+1) \\ &= (3-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{aligned}$$

ergeben sich der einfache Eigenwert 3 und der doppelte Eigenwert -1.

Der Eigenraum zum Eigenwert 3 ergibt sich als Raum der Lösungen $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} -6 & -4 & -8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einige Gauß-Schritte:

$$\begin{pmatrix} -6 & -4 & -8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Eigenraum ist span $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Dieser Eigenraum besitzt nur Dimension 1, folglich ist ein weiterer Hauptvektor h zum Eigenwert -1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Blick auf die erste Spalte legt die inhomogene Lösung

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nahe.

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Damit können wir die allgemeine Lösung anschreiben:

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{-t} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

2. Aufgabe 9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned} s^2X - s - 1 + 2sX - 2 - 3X &= \frac{12}{s}\mathrm{e}^{-3s} \\ (s^2+2s-3)X &= s+3+\frac{12}{s}\mathrm{e}^{-3s} \\ X &= \frac{s+3}{s^2+2s-3} + \frac{12\mathrm{e}^{-3s}}{s(s^2+3s+2)} \end{aligned}$$

Es ist

$$s^2+2s-3 = (s-1)(s+3),$$

damit

$$X(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{12\mathrm{e}^{-3s}}{s(s-1)(s+3)} \qquad .$$

Partialbruchzerlegung (mit Zuhaltemethode):

$$\frac{12}{s(s-1)(s+3)} = -\frac{4}{s} + \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s+3}.$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s-1} + \mathrm{e}^{-3s}\left(-\frac{4}{s} + \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s+3}\right) \\ &= \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{t}\right](s) + \mathrm{e}^{-3s}\mathcal{L}\left[-4+3\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-3t}\right](s) \\ x(t) &= \mathrm{e}^{t} + u_3(t)\left(-4+3\mathrm{e}^{t-3}+\mathrm{e}^{-3(t-3)}\right) \end{aligned}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Mit $y(x,t) = X(x)T(t)$ hat man

$$X''(x)T(t) - \frac{1}{4}X(x)T'(t) = 0.$$

Für $y(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{1}{4}\frac{T'(t)}{T(t)} = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = \frac{1}{4}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) - 4\lambda T(t) = 0.$$

Nicht-konstante, in x periodische Lösungen kann es nur für $\lambda < 0$ geben. Es ist dann für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^-$

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x,$$
$$T(t) = c_4 \mathrm{e}^{4\lambda t}$$

Die Bedingung $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$ bedeutet $X(0) = X(\pi) = 0$. Daraus folgt $c_1 = 0$ sowie $\sin\pi\sqrt{-\lambda} = 0$. Damit ist λ eins der Werte λ_n mit

$$\sqrt{-\lambda_n} = n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 0$$
$$\lambda_n = -n^2$$

Die Funktionen y sind von der Form

$$A_n \mathrm{e}^{-4n^2 t} \sin nx, \quad A_n \in \mathbb{R}.$$

b) Mit der Superposition

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-4n^2 t} \sin nx$$

ist

$$y(x,0) = \sum_{n=1} A_n \sin nx = 3\sin 2x + 5\sin 4x$$
$$\implies A_2 = 3,\ A_4 = 5,\ A_k = 0 \text{ für } k = 1,3 \text{ oder } k \geq 5.$$

Damit lautet die gesuchte Lösung

$$y(x,y) = 3\mathrm{e}^{-16t} \sin 2x + 5\mathrm{e}^{-64t} \sin 4x.$$

4. Aufgabe

12 Punkte

a) Die stationären Lösungen seien mit (x^*, y^*) bezeichnet.
Aus

$$0 = (x^* - 1)(y^* - 2), \qquad 0 = (x^* - 2)(y^* - 1)$$

findet man als GGPe die Punkte $(1, 1)$ und $(2, 2)$.

Für die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}(x, y)$ hat man

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} y-2 & x-1 \\ y-1 & x-2 \end{pmatrix}.$$

An den beiden Gleichgewichtspunkten gilt also

$$\mathcal{J}(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{J}(2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der doppelte Eigenwert der Diagonalmatrix $\mathcal{J}(1, 1)$ hat negativen Realteil, damit ist der GGP $(1, 1)$ asymptotisch stabil.
Die Matrix $\mathcal{J}(2, 2)$ hat $\lambda^2 - 1$ als charakteristisches Polynom und damit die Eigenwerte 1 und -1. Ein Eigenwert hat positiven Realteil, damit ist der GGP $(2, 2)$ instabil.

b) Mit dem Ansatz $E(x, y) = X(x) + Y(y)$ folgt als Bedingung für X und Y:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = X'(x)\dot{x} + Y'(y)\dot{y} = 0$$

Man hat

$$\begin{gathered}
X'(x)\dot{x} + Y'(y)\dot{y} = 0 \\
X'(x)(x-1)(y-2) + Y'(y)(x-2)(y-1) = 0 \\
X'(x)\frac{x-1}{x-2} = -Y'(y)\frac{y-1}{y-2} \\
\Longrightarrow \lambda = X'(x)\frac{x-1}{x-2}, \qquad \lambda = -Y'(y)\frac{y-1}{y-2} \\
\lambda\frac{x-2}{x-1} = X'(x), \qquad -\lambda\frac{y-2}{y-1} = Y'(y) \\
\lambda\left(1 - \frac{1}{x-1}\right) = X'(x), \qquad -\lambda\left(1 - \frac{1}{y-1}\right) = Y'(y) \\
\lambda\left(x - \ln|x-1|\right) + C_1 = X(x), \qquad -\lambda\left(y - \ln|y-1|\right) + C_2 = Y(y), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\
X(x) + Y(y) = \lambda\left(x - y + \ln\left|\frac{y-1}{x-1}\right|\right) + C_1 + C_2
\end{gathered}$$

Damit ist z.B. die Summe

$$x - y + \ln\left|\frac{y-1}{x-1}\right|$$

eine Erhaltungsgröße.

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Eine DGL von der Form $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ ist mit einem Faktor $\mathrm{e}^{s(x)}$ zu multiplizieren, bei dem gilt:

$$s'(x) = \frac{a_1(x) - a_0'(x)}{a_0(x)}.$$

Hier ist

$$s'(x) = \frac{2-0}{1} = 2.$$

Man wählt $s(x) = 2x$ und hat

$$\mathrm{e}^{2x}(y'' + 2y' + (1+\lambda)y) = 0.$$

Die DGL in selbstadjungierter Form lautet also

$$\left(\mathrm{e}^{2x} y'\right)' + (1+\lambda)\mathrm{e}^{2x} y = 0.$$

b) Für die linke Seite der DGL hat man für $y = y_k$ und $\lambda = \lambda_k$:

$$\begin{aligned} y_k'' + 2y_k' + (1+\lambda_k)y_k &= \left(\mathrm{e}^{-x}\sin kx - 2k\mathrm{e}^{-x}\cos kx - k^2\mathrm{e}^{-x}\sin kx\right) \\ &\quad + 2(-\mathrm{e}^{-x}\sin kx + k\mathrm{e}^{-x}\cos kx) + (1+\lambda_k)\mathrm{e}^{-x}\sin kx \\ &= \mathrm{e}^{-x}\sin kx(1 - k^2 - 2 + 1 + \lambda_k) + \mathrm{e}^{-x}\cos kx(-2k + 2k) \\ &= \mathrm{e}^{-x}\sin kx(-k^2 + \lambda_k) \end{aligned}$$

Die DGL wird erfüllt, wenn $\lambda_k = k^2$ gilt.

Die Eigenlösung $\mathrm{e}^{-x}\sin kx$ besitzt den Eigenwert k^2.

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.
Es sei $G(x, y) := x \sin y$. G ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und stetig differenzierbar. Damit existiert nach dem EES genau eine Lösung y mit $y(1) = \pi$.
Diese Lösung ist $y(x) = \pi$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Falsch.
Mit $x \sin x$ müssen auch $x \cos x, \sin x$ und $\cos x$ Lösungen sein, damit ist die Ordnung der DGL mindestens gleich 4.

c) Tafelanschrieb im Saal: Der Satzteil „stetigen Koeffizientenfunktionen“ soll durch „stetig differenzierbaren Koeffizientenfunktionen“ ersetzt werden.
Wahr.
Das ist der Wronski-Test.

d) Wahr.
Für $t \in \mathbb{R}_0^+$ gibt es also Konstanten $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ mit $|f(t)| \leq C_1 \mathrm{e}^{\gamma_1 t}$ und $|g(t)| \leq C_2 \mathrm{e}^{\gamma_2 t}$. Dann gilt $|f(t)g(t)| \leq C_1 C_2 \mathrm{e}^{(\gamma_1+\gamma_2)t}$, damit ist $f \cdot g$ von exponentieller Ordnung.

e) Falsch.
Für eine solche Zahl ν wäre dann $J''_\lambda(x) = J'_\lambda(x) = 0$ und die Bessel-DGL reduziert sich auf $(x^2 - \lambda^2)J_\lambda(x) = 0$, was als Funktionsgleichung unerfüllbar ist.