Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 11/12
Dr. J. Fuhrmann/Prof. Dr. G. Bärwolff 19. März 2012

März – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

11 Punkte

Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ die Lösung $\vec{y}$ des Anfangswertsproblems

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \vec{y}(t), \qquad \vec{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 2x(t) = \delta_3(t), \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 3.$$

Dabei bezeichnet $\delta_3(t)$ die an der Stelle 3 konzentrierte Delta-Funktion.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die reelle partielle Differentialgleichung in $y(x,t)$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0.$$

a) Ermitteln Sie alle Lösungen $y(x,t)$ der Form $y(x,t) = X(x)T(t)$, die die Bedingungen

$$y(0,t) = y(\pi,t) = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$$

erfüllen; dabei sollen die beiden Funktionen $X(x)$ und $T(t)$ periodisch und nicht-konstant sein.

b) Berechnen Sie durch Superposition der in Teil a) gefundenen Lösungen die Lösung y mit

$$y(x,0) = 3\sin 2x + 6\sin 4x.$$

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ das Anfangswertsproblem (AWP)

$$y' - \mathrm{e}^x y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

a) Zeigen Sie, dass dieses AWP eindeutig lösbar ist.

b) Ermitteln Sie die Lösung zusammen mit ihrem maximalen Definitionsbereich.

5. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei das Rand-Eigenwert-Problem

$$x^2 y'' + 2xy' + \frac{\lambda}{x^2} y = 0 \quad (*), \qquad y(\tfrac{1}{2}) = y(1) = 0 \quad (**).$$

Es sei bekannt, dass für $k = 1, 2, \ldots$ die Funktionen $y_k \colon [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$y_k(x) := \sin \frac{k\pi}{x}$$

Eigenlösungen des Rand-Eigenwert-Problems $(*), (**)$ sind.

a) Bringen Sie die DGL $(*)$ in selbstadjungierte Form.

b) Berechnen Sie für die Eigenlösungen y_k die zugehörigen Eigenwerte λ_k.

c) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass je zwei verschiedene Eigenfunktionen y_k und y_l mit $k \neq l$ orthogonal sind.

Hinweise: Die selbstadjungierte Form muss klar zu erkennen sein.
Benutzen Sie die selbstadjungierte Form zur Berechnung der Eigenwerte.
Benutzen Sie beim Integrieren die Substitution $t := \frac{1}{x}$ und verwenden Sie die Formel $\sin u \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u - v) - \cos(u + v))$.

6. Aufgabe 10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Es gibt eine reelle lineare homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, für die die Funktionen x und x^2 eine Lösungsbasis bilden.

b) Das dynamische System $\dot{\vec{x}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \vec{x}$ (im $\mathbb{R}^2$) besitzt keinen asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt.

c) Es gibt eine nicht-konstante stetige Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von exponentieller Ordnung mit $f(t) = 0$ für $t \leq 0$, so dass $f(t) * u_1(t) = f(t)$ gilt. („$*$" steht für das Faltungsprodukt, „u_1" für die Heaviside-Funktion mit Sprungstelle 1.)

d) Die Randwertaufgabe $y'' + y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 1$ für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $y \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ ist unlösbar.

e) Jede Bessel-Funktion ist monoton fallend.