Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 12
Dr. G. Penn-Karras
Dr. C. Papenfuss 16. Juli 2012

Juli-Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit **30** von **60** Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens **10** von **30** Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 8 Punkte

Berechnen Sie alle Gleichgewichtslagen des Systems:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(y+1) \\ \dot{y} &= (x-3)(x+y) \end{aligned}$$

und untersuchen Sie ihr Stabilitätsverhalten.

2. Aufgabe 10 Punkte

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t^2 e^t + \delta_1(t) \ , \quad x(0) = 0 \ , \quad \dot{x}(0) = 1 \ .$$

$\delta_1(t) = \delta(t-1)$ bezeichnet die in $t = 1$ zentrierte Dirac-Funktion.

3. Aufgabe 12 Punkte

a) Bestimmen Sie alle (reellen) Lösungen der Differentialgleichung

$$u_{xx} - 4u_{tt} = 0$$

der Gestalt $u(x,t) = X(x)T(t)$, die periodisch in x sind. Lösungen, die nicht periodisch sind können ohne Begründung weggelassen werden.

b) Welche der in a) bestimmten Lösungen erfüllen weiterhin die Randbedingungen

$$u(0,t) = u(2,t) = 0 \ ?$$

c) Welche der in b) bestimmten Lösungen erfüllen weiterhin die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 3\sin(2\pi x) \ . \\ u_t(x,0) &= 0 \ ? \end{aligned}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 12 Punkte

a) Geben Sie eine lineare, homogene Differentialgleichung mit konstanten, reellen Koeffizienten an, die die Lösung

$$y(t) = t + \cos t$$

hat. Wählen Sie die Ordnung der Differentialgleichung so niedrig wie möglich. Begründen Sie Ihre Wahl der Ordnung.

b) Geben Sie ein Fundamentalsystem zu dieser DGl an.

c) Geben Sie einen Ansatz vom Typ der rechten Seite für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an, wenn die Inhomogenität der obigen DGl

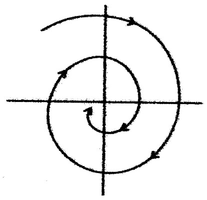
$$b(t) = 1$$

lautet.

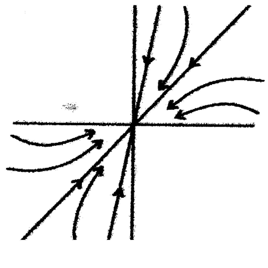
5. Aufgabe 9 Punkte

Entscheiden Sie für jedes der drei angebenen DGl-Systeme $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, welches der abgebildeten Phasenportraits dazugehört. Begründen Sie Ihre Antwort. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.

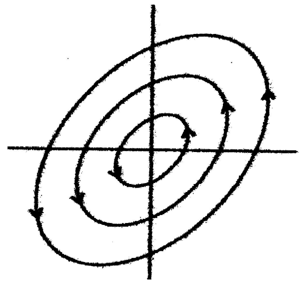
$$a)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad c)\ A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$



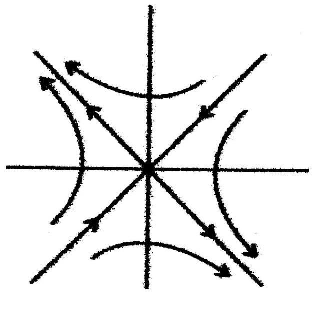
A)



B)



C)



D)

6. Aufgabe 9 Punkte

a) Die reelle $2x2$-Matrix A habe einen Eigenwert $2 + i$ und einen Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem der DGl $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ an.

b) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $F(s) = Ł[f(t)](s)$ von $f(t)$, wenn gilt

$$t * f(t) = tf(t) \ .$$

Hinweis: Es ist nicht verlangt, die Funktion $f(t)$ anzugeben, sondern nur die Laplace-Transformierte.