Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozentin Dr. Penn-Karras
Assistentin Dr. C. Papenfuß

SS 2012

Differentialgleichungen für Ingenieure
Lösung Klausur Juli

Rechenteil

1. Aufgabe — 8 Punkte

1. Gleichung: $x = 0$ oder $y = -1$.

Für $x = 0$: 2. Gleichung $-3y = 0 \implies y = 0$,
Für $y = -1$: 2. Gleichung $(x-3)(x-1) = 0 \implies x = 3$ oder $x = 1$.

Gleichgewichtslagen sind $(0,0)$, $(3,-1)$ und $(1,-1)$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy + x \\ x^2 + xy - 3x - 3y \end{pmatrix} \implies \mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} y+1 & x \\ 2x + y - 3 & x - 3 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$.

Wegen $\lambda_1 > 0$ ist die Gleichgewichtslage $(0,0)$ instabil.

$$\mathcal{J}(3,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} : \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6 = 0, \implies \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}.$$

Wegen $\lambda_1 = \sqrt{6} > 0$ ist die Gleichgewichtslage $(3,-1)$ instabil.

$$\mathcal{J}(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} : \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

$\implies \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$.

$\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = -1 < 0 \implies$ die Gleichgewichtslage $(1,-1)$ ist asymptotisch stabil.

2. Aufgabe **10 Punkte**

Anwenden der Laplacetransformation auf die DGL liefert mit $\mathcal{L}[x](s) =: X(s)$,

$\mathcal{L}[\ddot{x}](s) = s^2\mathcal{L}[x](s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2X(s) - 1,$

$\mathcal{L}[\dot{x}](s) = s\mathcal{L}[x](s) - x(0) = sX(s)$

$\mathcal{L}[t^2e^t](s) = \mathcal{L}[t^2](s-1) = \dfrac{2}{(s-1)^3}.$

$s^2X - 1 - 2sX(s) + X(s) = e^{-s} + \dfrac{2}{(s-1)^3},$

$X(s^2 - 2s + 1) = 1 + e^{-s} + \dfrac{2}{(s-1)^3},$

$X = \dfrac{1}{s^2 - 2s + 1} + \dfrac{e^{-s}}{s^2 - 2s + 1} + \dfrac{2}{(s-2)^3(s^2 - 2s + 1)},$

$= \dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{e^{-s}}{(s-1)^2} + \dfrac{2}{(s-1)^5}$

Rücktransformation ergibt

$X = \dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{e^{-s}}{(s-1)^2} + \dfrac{2}{(s-1)^5},$

$X = \mathcal{L}[t](s-1) + e^{-s}\mathcal{L}[t](s-1) + \frac{2}{4!}\mathcal{L}[t^4](s-1),$

$X = \mathcal{L}[te^t](s) + e^{-s}\mathcal{L}[te^t](s) + \frac{1}{12}\mathcal{L}[t^4e^t](s),$

$X = \mathcal{L}[te^t](s) + \mathcal{L}[u_1(t)(t-1)e^{t-1}](s) + \frac{1}{12}\mathcal{L}[t^4e^t](s),$

Die Lösung des AWPs ist

$x(t) = te^t + u_1(t)(t-1)e^{t-1} + \frac{1}{12}t^4e^t.$

3. Aufgabe 12 Punkte

a) Der Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ liefert

$$4X(x)T''(t) = X''(x)T(t),$$

also

$$4\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir lösen zuerst die DGL in $X(x)$:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{3.1}$$

und unterscheiden dann drei Fälle für λ:

(a) $\lambda > 0$ liefert keine periodischen Lösungen.

(b) $\lambda = 0$: Periodisch ist nur

$$X(x) = C_1 \ .$$

Die DGL für $T(t)$ lautet in dem Fall

$$T''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = C_2 t + C_3$$

und die Lösung der PDGL

$$u(x,t) = C_1(C_2 t + C_3) \ .$$

(c) $\lambda < 0$: Es ergeben sich die Lösungen

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \Rightarrow$$
$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$$

und

$$4T''(t) = \lambda T(t) \quad \Rightarrow$$
$$T(t) = C\cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}t\right) + D\sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}t\right)$$

und die Lösung der PDGL

$$u(x,t) = \left(A\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right)\right)\left(C\cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}t\right) + D\sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}t\right)\right) \ .$$

b)

$$u(0,t) = u(2,t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad X(0) = X(2) = 0 \ .$$

Fall $\lambda = 0$:

$$X(0) = C_1 = 0 \ ,$$

Es bleibt nur die triviale Lösung.

Fall $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} X(0) &= A\cos(0) + B\sin(0) = A = 0 \\ X(2) = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}2\right) + B\sin\left(\sqrt{-\lambda}2\right) &= B\sin\left(\sqrt{-\lambda}2\right) = 0 \end{aligned}$$

$B \neq 0$, da sonst nur die triviale Lösung bleibt. Die Nullstellen des Sinus sind $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Es ist

$$\sqrt{-\lambda} = n\frac{\pi}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(weil $\sqrt{\cdot}$ stets nicht-negativ ist, sind nur positive ganze Zahlen n zugelassen.) λ ist also einer der Werte

$$\begin{aligned} \lambda_n = -\left(n\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad &\Rightarrow \\ X_n(x) = B_n \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right) \end{aligned}$$

Für ein festes n setzen wir λ_n für λ in die Gleichung für $T(t)$

$$T_n(t) = C_n\cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right) + D_n\sin\left(n\frac{\pi}{4}t\right) \quad .$$

und erhalten als Lösungen der PDGL

$$u_n(x,t) = B_n\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\left(C_n\cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right) + D_n\sin\left(n\frac{\pi}{4}t\right)\right) \quad .$$

Daraus die allgemeine Lösung mit Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\left(C_n\cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right) + D_n\sin\left(n\frac{\pi}{4}t\right)\right) \quad .$$

c) Auswerten der Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u_t(x,0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad T_n'(0) = 0 \\ 0 = \left(-C_n\sin\left(n\frac{\pi}{4}0\right) + D_n\cos\left(n\frac{\pi}{4}0\right)\right)n\frac{\pi}{4} \\ 0 = D_n \quad &\Rightarrow \quad T_n(t) = C_n\cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right) \\ u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right) C_n\cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right) \end{aligned}$$

Die andere Anfangsbedingung liefert:

$$u(x,0) = 3\sin(2\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right) C_n\cos\left(n\frac{\pi}{4}0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right) C_n$$

Für die Koeffizienten B_nC_n bekommen wir

$$B_4C_4 = 3, \quad B_nC_n = 0 \text{ sonst} \ .$$

Die Lösung $u(x,t)$ des RAWP lautet

$$u(x,t) = 3\sin\left(4\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(4\frac{\pi}{4}t\right) = 3\sin(2\pi x)\cos(\pi t)$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 12 Punkte

a) Aus der Lösung $y_1(t) = t$ schließt man, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ein doppelter Eigenwert ist. Aus der Lösung $y_2(t) = \cos t$ schließt man, daß $\lambda_3 = i$ ein weiterer Eigenwert ist. Damit muß auch $\lambda_4 = -i$ ein Eigenwert sein. Damit lautet das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 (\lambda + i)(\lambda - i) \\ &= \lambda^2 \left(\lambda^2 + 1\right) = \lambda^4 + \lambda^2 \; . \end{aligned}$$

Eine DGl dazu ist

$$y'''' + y'' = 0 \; .$$

b) $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = t$, $y_3(t) = \sin t$ und $y_4(t) = \cos t$ bilden ein Fundamentalsystem.

c) Es liegt Resonanz mit doppelter Nullstelle $\lambda = 0$ vor. Der Ansatz lautet

$$y_p(t) = At^2 \; .$$

5. Aufgabe 9 Punkte

a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

Der Fixpunkt ist asymptotisch stabil, da beide Realteile negativ sind. Bei konjugiert komplexen Eigenwerten sind die Lösungen Spiralen, also A).

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{1^2 + 8} = 1 \pm 3$$
$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -2$$

Der Fixpunkt ist instabil. Es gibt eine stabile und eine instabile Richtung, d.h. D) c)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 4 & -7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-2-\lambda)(-7-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 9\lambda + 18 = 0 \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} = -\frac{9}{2} \pm \frac{3}{2} \\ \lambda_1 &= -3, \quad \lambda_2 = -6 \end{aligned}$$

Zwei reelle negative Eigenwerte, der Fixpunkt ist asymptotisch stabil: B)

6. Aufgabe 9 Punkte

a) Eine Lösung ist

$$e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{2t}\left(\cos(t) + i\sin(t)\right) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\left(\cos(t) + i\sin(t)\right) \\ e^{2t}\left(i\cos(t) - \sin(t)\right) \end{pmatrix} .$$

Ein reelles Fundamentalsystem findet man, indem man Real- und Imaginärteil bildet:

$$\vec{y}_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} , \quad \vec{y}_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} .$$

b) Anwenden der Laplacetransformation und Faltungssatz liefert (mit $\mathcal{L}[f(t)](s) =: F(s)$)

$$\begin{aligned} t * f(t) &= tf(t) \\ \mathcal{L}[t * f(t)](s) = \mathcal{L}[t](s)\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[tf(t)](s) &= -F'(s) \\ \frac{1}{s^2}F(s) &= -F'(s) \\ \frac{F'(s)}{F(s)} &= -\frac{1}{s^2} \\ \ln F(s) &= \frac{1}{s} + C \\ F(s) &= \tilde{C}e^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$