Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 12/13
A. Gündel-vom Hofe 16. Februar 2013

Februar – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **110 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ die Lösung $\vec{y}$ des Anfangswertsproblems

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(t), \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 2x(t) = 12u_3(t)(t-3), \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 3.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Finden Sie die Lösung u des reellen Randwertproblems

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{3}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 3\sin 2x + 5\sin 4x$$

als Superposition von Produkten der Form $X(x)T(t)$. Suchen Sie dabei gezielt nach Funktionen $X(x)$, die periodisch und nicht-konstant sind.

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe

8 Punkte

Ermitteln Sie eine Lösungsbasis für die Differentialgleichung

$$t^2 y''(t) - 2y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

indem Sie den Ansatz $y(t) = t^r$ mit $r \in \mathbb{R}$ verwenden. Zeigen Sie dabei, dass dieser Ansatz zwei linear unabhängige Lösungen liefert.

5. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben ist das reelle dynamische System

$$\dot{x} = \sin(x + y), \qquad \dot{y} = \mathrm{e}^x - 1.$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen.

b) Bestimmen Sie für jede dieser Gleichgewichtslösungen den Stabilitätscharakter.

Hinweis: Dieses dynamische System hat unendlich viele Gleichgewichtslösungen. Es gilt: $\cos n\pi = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Für Aufgabe 6 bitte wenden!

6. Aufgabe 10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

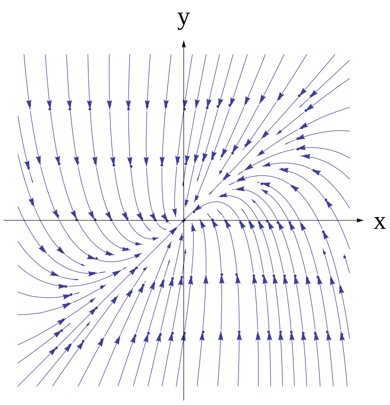
a) Es gibt einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$, eine reelle Zahl λ und eine reelle konstante 2×2-Matrix A, so dass die Funktionen $\vec{v}e^{\lambda t}$ und $t\vec{v}e^{\lambda t}$ eine Lösungsbasis für die DGL $A\vec{y}(t) = \vec{y}'(t)$ bilden.

b) Es gibt eine reelle lineare homogene DGL 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, für die die Funktionen $x \cos x$ und $\sin x$ zwei Lösungen sind.

c) Das Verhalten des dynamischen Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

in der Nähe des Gleichgewichtspunkts $(0, 0)$ wird durch das Phasenporträt



beschrieben.

d) Es gilt $t^2 u_0(t) * t^2 u_0(t) = u_0(t) * t^4 u_0(t)$.
(„$u_0(t)$“ steht für die Heaviside-Funktion mit Sprungstelle 0.)

e) Das Randwertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad t \geq 0, \; x \in [0, 2\pi],$$
$$u(0,t) = u(2\pi, t) = 0$$

wird sowohl durch $u(x,t) = \sin x \cos t$ als auch durch $u(x,t) = \sin 2x \sin 2t$ gelöst.