**Musterlösung — DGL f. Ing., 16. Februar 2013**

## 1. Aufgabe

10 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
\implies 0 &= (-2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 + 1 - [(1-\lambda) - (-2-\lambda) - 2(-1-\lambda)] \\
&= (2+\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) + 3 - [1-\lambda+2+\lambda+2+2\lambda] \\
&= (2+\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) + 3 - [5+2\lambda] = (2+\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) - 2 - 2\lambda \\
&= (2+\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) - 2(1+\lambda) = (1+\lambda)\left[-(\lambda+2)(\lambda-1) - 2\right] \\
&= (1+\lambda)\left[-\lambda^2 - \lambda + 2 - 2\right] = (1+\lambda)\left[-\lambda^2 - \lambda\right] = (1+\lambda)\left[-\lambda(1+\lambda)\right] = -\lambda(\lambda+1)^2
\end{aligned}$$

ergeben sich der einfache Eigenwert 0 und der doppelte Eigenwert $-1$.

Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist eindimensional:

$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Der Eigenraum zum Eigenwert $-1$ ergibt sich als Raum der Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich der ebenfalls nur eindimensionale Eigenraum $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Folglich ist ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor $h$ zum Eigenwert $-1$ zu suchen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man findet als eine inhomogene Lösung (Schauen auf 3. Spalte):

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Die gesuchte Lösung schreibt sich wie folgt:

$$\vec{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{-t} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

mit Konstanten $C_1, C_2, C_3$ mit

$$\vec{y}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $C_1 = C_3 = 1$, $C_2 = 0$, somit ist mit

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} t \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$$

die gewünschte Lösung des AWPs gegeben.

## 2. Aufgabe

10 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned} s^2X - 3 + sX - 2X &= \frac{12\mathrm{e}^{-3s}}{s^2} \\ (s^2 + s - 2)X &= 3 + \frac{12\mathrm{e}^{-3s}}{s^2} \\ X &= \frac{3}{s^2 + s - 2} + \frac{12\mathrm{e}^{-3s}}{s^2(s^2 + s - 2)} \end{aligned}$$

Es ist

$$s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2),$$

damit Partialbruchzerlegung (mit Zuhaltemethode):

$$\frac{3}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

und

$$\frac{12}{s^2(s-1)(s+2)} = \frac{4}{s-1} - \frac{1}{s+2} + \frac{C}{s} - \frac{6}{s^2}.$$

Die Zahl $C$ bestimmt man z.B. mit $s = -1$:

$$-6 = -2 - 1 - C - 6 \implies C = -3.$$

Es ist

$$\frac{12}{s^2(s-1)(s+2)} = \frac{4}{s-1} - \frac{1}{s+2} - \frac{3}{s} - \frac{6}{s^2}.$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathrm{e}^{-3s}\left(\frac{4}{s-1} - \frac{1}{s+2} - \frac{3}{s} - \frac{6}{s^2}\right) + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2} \\ &= \mathrm{e}^{-3s}\mathcal{L}\left[4\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t} - 3 - 6t\right](s) + \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t}\right](s) \\ x(t) &= u_3(t)\left(4\mathrm{e}^{t-3} - \mathrm{e}^{-2(t-3)} - 3 - 6(t-3)\right) + \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

## 3. Aufgabe

10 Punkte

Partielle DGL ergibt: $X''(x)T(t) - \frac{1}{3}X(x)T''(t) = 0$
Für $\bar{u}(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{1}{3}\frac{T'(t)}{T(t)} = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = \frac{1}{3}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in $X$ und $T$:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) - 3\lambda T(t) = 0.$$

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $T_\lambda(t)$ mit

$$T_\lambda(t) = \mathrm{e}^{3\lambda t}$$

eine Lösung der DGL für $T$.
Aus der homogenen Randbedingung

$$\bar{u}(0,t) = \bar{u}(\pi,t) = 0$$

folgt mit $\bar{u}(x,t) = X(x)T(t)$ die Aussage $X(0) = X(\pi) = 0$.
Für die DGL $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ kann es nicht-konstante periodische Lösungen kann es nur für $\lambda < 0$ geben. Dann ist

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
$$X(0) = C_1 = 0 \implies X(\pi) = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$$
$$\implies C_2 = 0 \text{ oder } \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$$

Nicht-verschwindende Lösungen $X(x)$ gibt es für solche Werte von $\lambda$, die die Gleichung $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$ erfüllen. $\lambda$ muss eine der Zahlen $\lambda_n$ mit

$$\lambda_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0,$$

sein.

Für $\bar{u}(x,t)$ hat man also die Funktionen $\bar{u}_n(x,t)$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 0$

$$\bar{u}_n(x,t) := \mathrm{e}^{-3n^2 t} \sin nx$$

zur Verfügung, um durch Linearkombination eine Lösung des gesamten RWPs zu finden.

Mit der Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \bar{u}_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-3n^2 t} \sin nx$$

sind Koeffizienten $A_n$ zu suchen mit

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 3 \sin 2x + 5 \sin 4x,$$

also

$$A_2 = 3, \quad A_4 = 5, \qquad A_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{2,3\}.$$

Damit hat man für die gesuchte Lösung

$$u(x,y) = 3\mathrm{e}^{-12t} \sin 2x + 5\mathrm{e}^{-48t} \sin 4x.$$

## 4. Aufgabe

8 Punkte

Der Ansatz $y(t) = t^r$ in die DGL eingesetzt, ergibt

$$r(r-1)t^r - 2t^r = 0. \tag{0.1}$$

Diese Gleichung muss für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gelten und überdies ist $t^r$ wegen $t > 0$ stets positiv, daraus folgt

$$\begin{aligned} r(r-1) - 2 &= 0 \\ r^2 - r - 2 &= 0 \\ \Longrightarrow\ r = -1 \quad &\text{oder} \quad r = 2. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Damit lösen die Funktionen $t^{-1}$ und $t^2$ diese DGL.
Die DGL ist linear und von zweiter Ordnung. Wenn diese gefundenen Funktionen linear unabhängig sind, hat man eine Lösungsbasis zusammengestellt. Die lineare Unabhängigkeit wird mit dem Wronski-Test festgestellt. Man wählt die Stelle 1 und hat

$$\begin{vmatrix} t^{-1} & t^2 \\ -t^{-2} & 2t \end{vmatrix}_{t=1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Die Wronski-Determinante verschwindet nicht, damit sind die Lösungen $t^{-1}$ und $t^2$ im Definitionsbereich der DGL linear unabhängig.
Die Funktionen $t^{-1}$ und $t^2$ bilden eine Lösungsbasis der gegebenen DGL.

Alternativ kann man die verlangte lineare Unabhängigkeit auch direkt zeigen: Es seien zwei Zahlen $\lambda_1$ und $\lambda_2$, so dass

$$\lambda_1 t^2 + \lambda_2 t^{-1} = 0$$

für alle Stellen $t \in \mathbb{R}^+$ gelte. Diese Gleichung ist lösbar, nämlich durch $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Man setzt nun nacheinander zwei positive Werte für $t$ ein, z.B. $t = 1$ und $t = \frac{1}{2}$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0.$$

Es folgt zunächst $\lambda_2 = 0$ und sodann $\lambda_1 = 0$. Aus $\lambda_1 t^2 + \lambda_2 t^{-1} = 0,\ t \in \mathbb{R}^+$, folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: Die Funktionen $t^2$ und $t^{-1}$ sind auf $\mathbb{R}^+$ linear unabhängig.

## 5. Aufgabe

12 Punkte

a) Gleichgewichtslösungen $(x^*(t), y^*(t))$ sind konstante Funktionen und lösen die Gleichungen

$$\sin(x^* + y^*) = 0, \qquad e^{x^*} - 1 = 0.$$

Daraus folgt zuerst $x^*(t) = 0$, sodann $\sin y^*(t) = 0$. Für jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ hat man die Lösung

$$x_n^*(t) = 0, \quad y_n^*(t) = n\pi.$$

b) Für die Jacobi-Matrix hat man

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x + y) & \cos(x + y) \\ e^x & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist

$$\mathcal{J}(x_n^*, y_n^*) = \begin{pmatrix} \cos n\pi & \cos n\pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom ergibt sich die Bedingung

$$\begin{vmatrix} (-1)^n - \lambda & (-1)^n \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = ((-1)^n - \lambda)(-\lambda) - (-1)^n = \lambda^2 - (-1)^n \lambda - (-1)^n = 0.$$

Man hat für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Eigenwerte $\lambda_{n,1}$ und $\lambda_{n,2}$ mit

$$\lambda_{n,1} = \frac{(-1)^n}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (-1)^n}, \qquad \lambda_{n,2} = \frac{(-1)^n}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + (-1)^n}.$$

Für gerade Werte von $n$ sind $\lambda_{n,1}$ und $\lambda_{n,2}$ reell, der Eigenwert $\lambda_{n,1}$ ist sogar positiv.
Für ungerade Werte von $n$ sind $\lambda_{n,1}$ und $\lambda_{n,2}$ nicht-reell, ihre Realteile sind negativ.
Damit ist die Gleichgewichtslösung $(n\pi, 0)$ für gerades $n$ instabil und für ungerade $n$ asymptotisch stabil.

## 6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch
Die erste Funktion in die DGL eingesetzt, ergibt $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Die zweite Funktion in die DGL eingesetzt, ergibt $tA\vec{v} = \vec{v} + t\lambda\vec{v}$, mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ also $\vec{v} = \vec{0}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

b) Wahr
In Normalform handelt es sich um die DGL $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$. Die Zahlen $\mathrm{i}$ und $-\mathrm{i}$ müssen nämlich doppelte Nullstellen des charakteristischen Polynoms sein. Dieses Polynom ist gleich $(\lambda + \mathrm{i})^2(\lambda - \mathrm{i})^2$, also gleich $(\lambda^2 + 1)^2$.

c) Falsch.
Ein Eigenwert der Systemmatrix hat positiven Realteil, damit ist der GGP instabil. Das Phasenporträt suggeriert aber einen asymptotisch stabilen GGP.

d) Falsch.
Laplacetransformation führt auf $\left(\frac{2!}{s^3}\right)^2 = \frac{1}{s} \cdot \frac{4!}{s^5}$, was wegen $(2!)^2 \neq 4!$ falsch ist.

e) Wahr.
Die beiden Funktionen erfüllen die partielle DGL:

$$(-\sin x)\cos t - \sin x(-\cos t) = 0, \quad (-4\sin 2x)\sin 2t - \sin 2x(-4\sin 2t) = 0.$$

und die Randbedingungen

$$\sin 0 \sin t = \sin 2\pi \sin t = 0, \quad \sin 4 \cdot 0 \sin 2t = \sin 4\pi \sin 2t = 0.$$

Insbesondere ist dieses RWP nicht eindeutig lösbar.