Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 13/14
G. Penn-Karras 19. Februar 2014

Februar – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 11 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}$ der Differentialgleichung

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

2. Aufgabe 8 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 2u_1(t)\mathrm{e}^{-(t-1)}, \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Dabei steht $u_1(t)$ für die Sprungfunktion, die bei $t = 1$ von Null auf Eins springt.

3. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben ist das Randwertproblem

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 16u(x,t), \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

a) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$, wobei die Funktion $X(x)$ periodisch und nicht-konstant ist.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung, die die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 4\sin 2x + 7\sin 3x$$

erfüllt.

Hinweis: Konstruieren Sie Ihre Separationskonstante λ so, dass die DGL für X von der Form $X'' - \lambda X = 0$ ist.

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist das Anfangswertsproblem (AWP)

$$yy' + 2\cos x = 0, \qquad y(0) = \sqrt{2}.$$

a) Berechnen Sie für dieses AWP eine Lösung $y(x)$ mit ihrem maximalen Definitionsbereich.

b) Zeigen Sie, dass dieses AWP keine weiteren Lösungen besitzt.

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist in Abhängigkeit von zwei reellen Parametern α und β das reelle dynamische System

$$\dot{x} = \alpha x(1 - x + y), \qquad \dot{y} = \beta y(1 + x - y).$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen.

b) Gibt es reelle Werte von α und β mit $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, so dass alle Gleichgewichtslösungen asymptotisch stabil sind? Begründen Sie Ihre Antwort.

Für Aufgabe 6 bitte wenden!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Hat eine lineare Differentialgleichung $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ mit reellen konstanten Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ die Funktion $y(x) = x\mathrm{e}^x \cos x$ als eine Lösung, so ist die Ordnung n dieser Differentialgleichung mindestens 4.

b) Für die DGL $y'' + 4y = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ bilden die Funktionen $\cos 2x$ und $\sin^2 x - \cos^2 x$ ein Fundamentalsystem.

c) Es gibt eine Lösung $y(x)$ der linearen Differentialgleichung $y'' - y' = x\mathrm{e}^x$, die die Form $y(x) = \mathrm{e}^x(Ax + B)$ mit gewissen reellen Zahlen A, B hat.

d) Es gibt eine stetige Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ von exponentieller Ordnung mit $f(t) \neq 0$, die die Eigenschaft $f(t) * \mathbf{1} = f(t)$ hat.

(Das Symbol $*$ steht für das Faltungsprodukt im Sinne der Laplace-Transformation. Das Symbol $\mathbf{1}$ steht für die konstante Funktion mit dem Wert 1.)

e) Für jede natürliche Zahl n mit $n > 0$ gilt $J_n(0) = 0$.

($J_n(x)$ ist die Bessel-Funktion 1. Art zum Index n.)