Musterlösung — DGL f. Ing., 19. Februar 2014

1. Aufgabe

11 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \; 0 = (2-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2 = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

ergeben sich der doppelte Eigenwert 1 und der einfache Eigenwert 2.

Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist eindimensional:

$$\text{Kern}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist eindimensional:

$$\text{Kern}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Beim Eigenwert 1 ist die algebraische Vielfachheit größer als die geometrische Vielfachheit.

Folglich ist ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor h zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Anschauen der 2. Spalte findet man als eine inhomogene Lösung:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Für die allgemeine Lösung hat man also

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C} \text{ (oder } \mathbb{R}\text{)}.$$

2. Aufgabe

8 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned} s^2 X - 1 + 2sX + X &= \frac{2\mathrm{e}^{-s}}{s+1} \\ (s^2 + 2s + 1)X - 1 &= \frac{2\mathrm{e}^{-s}}{s+1} \\ X &= \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)^3} \end{aligned}$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}\left[t\mathrm{e}^{-t}\right](s) + \mathrm{e}^{-s} \mathcal{L}\left[t^2 \mathrm{e}^{-t}\right](s) \\ x(t) &= t\mathrm{e}^{-t} + u_1(t)(t-1)^2 \mathrm{e}^{-(t-1)} \end{aligned}$$

3. Aufgabe

11 Punkte

a) Partielle DGL ergibt: $X''(x)T(t) - X(x)T'(t) = 16X(x)T(t)$
Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{T'(t)}{T(t)} = 16 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = 16 + \frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) + (16 - \lambda)T(t) = 0.$$

Aus der Randbedingung

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

folgt mit $u(x,t) = X(x)T(t)$ die Aussage $X(0) = X(\pi) = 0$.
Für die DGL $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ kann es nicht-konstante periodische Lösungen nur für $\lambda < 0$ geben. Wir setzen $\sqrt{-\lambda} := \mu$. Dann ist

$$\begin{gathered} X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ X(0) = C_1 = 0 \implies X(\pi) = C_2 \sin \mu\pi = 0 \\ \implies C_2 = 0 \text{ oder } \sin \mu\pi = 0 \end{gathered}$$

Nicht-verschwindende Lösungen $X(x)$ gibt es für solche Werte von μ, die die Gleichung $\sin \mu\pi = 0$ erfüllen. μ muss gleich einer natürlichen Zahl n mit $n > 0$ sein. Damit ist λ gleich einer der Zahlen λ_n mit

$$\lambda_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Für jede Wahl von n ergibt sich eine Lösung T_n für T

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{-(16-\lambda_n)t} = \mathrm{e}^{-(16+n^2)t}$$

Für $u(x,t)$ hat man also die Funktionen $u_n(x,t)$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$u_n(x,t) := \mathrm{e}^{-(16+n^2)t} \sin nx.$$

gefunden.

b) Mit der Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-(16+n^2)t} \sin nx$$

sind Koeffizienten A_n zu suchen mit

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 4\sin 2x + 7\sin 3x$$

also

$$A_2 = 4,\ A_3 = 7, \qquad A_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{2,3\};$$

Damit hat man für die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = 4\mathrm{e}^{-20t} \sin 2x + 7\mathrm{e}^{-25t} \sin 3x$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Mit Trennung der Veränderlichen hat man nacheinander:

$$\begin{aligned} -2\cos x &= yy' \\ -2\sin x + C &= \frac{1}{2}y^2 \\ \sqrt{-4\sin x + 2C} &= y(x) \end{aligned}$$

Die Anfangsvorgabe $y(0) = \sqrt{2}$ liefert $C = 1$.
Somit ist $y(x) = \sqrt{2 - 4\sin x} = \sqrt{2(1 - 2\sin x)}$ eine Lösung.

Der maximale Definitionsbereich wird durch den der Wurzel bestimmt. Es muss gelten $1 - 2\sin x > 0$, also $\sin x < \frac{1}{2}$ und somit $-\frac{7}{6}\pi < x < \frac{1}{6}\pi$. Die angegebene Lösung ist auf $]-\frac{7}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi[$ definiert und dort differenzierbar.

b) Wir verwenden den Existenz- und Eindeutigkeitssatz (EES).
Es ist $G(x, y) = -2y^{-1}\cos x$. Für die partiellen Ableitungen hat man

$$G_x(x, y) = 2y^{-1}\sin x, \qquad G_y(x, y) = 2y^{-2}\cos x$$

Diese partiellen Ableitungen existieren in der oberen Halbebene $y > 0$ und sind dort stetig.
Der Anfangspunkt ist $(0, \sqrt{2})$. liegt in dieser Halbebene. Nach dem EES gibt es damit genau eine maximale Lösung des AWPs.

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Gleichgewichtslösungen $(x^*(t), y^*(t))$ sind konstante Funktionen und lösen die Gleichungen

$$\alpha x^*(1 - x^* + y^*) = 0, \qquad \beta y^*(1 + x^* - y^*) = 0.$$

Für $x^* = 0$ ergibt sich $y^* = 0$ oder $y^* = 1$.
Für $x^* \neq 0$ ergibt sich $y^* = x^* - 1$ und damit $y^* \cdot 2 = 0$, also $y^* = 0$ und somit $x^* = 1$.
Es gibt drei Gleichgewichtslösungen:

$$(x^*(t), y^*(t)) = (0,0), (0,1) \text{ und } (1,0)$$

b) Für die Jacobi-Matrix hat man

$$\mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha(1-2x+y) & \alpha x \\ \beta y & \beta(1+x-2y) \end{pmatrix}.$$

Für den GGP $(0,0)$ ist

$$\mathcal{J}(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind gleich α und β.
Für den GGP $(0,1)$ ist

$$\mathcal{J}(0,1) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind 2α und $-\beta$.

Für den GGP $(1,0)$ ist

$$\mathcal{J}(1,0) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $-\alpha$ und 2β.
Asymptotische Stabilität verlangt mindestens, dass keiner der gefundenen Eigenwerte $\alpha, \beta, 2\alpha, -\beta, -\alpha, 2\beta$ positiv ist.

Das ist mit $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$ nicht möglich.

Es gibt keine reellen nicht-verschwindenden Werte von α und β, so dass alle Gleichgewichtslösungen asymptotisch stabil wären.

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.
Da die Funktion $x\mathrm{e}^x\cos x$ eine homogene Lösung ist, muss die komplexe Zahl $1+\mathrm{i}$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein. Da das Polynom reell ist, ist auch $1-\mathrm{i}$ eine doppelte Nullstelle. Somit ist der Grad des Polynoms mindestens gleich vier, so auch die Ordnung der DGL.

b) Falsch.
Die Wronski-Determinante dieser vorgeschlagenen Funktionen muss dann stets von Null verschieden sein. Es ist aber

$$\det\begin{pmatrix}\cos 2x & \sin^2 x-\cos^2 x\\ -2\sin 2x & 4\sin x\cos x\end{pmatrix}\Bigg|_{x=0}=\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0.$$

Die Wronski-Determinante verschwindet an wenigstens einer Stelle im Definitionsbereich der DGL. Widerspruch.
(Es braucht nicht geprüft werden, ob diese Funktionen die DGL überhaupt lösen.)

c) Falsch.
(Offenbar handelt es sich nicht um eine homogene Lösung, denn diese müsste eine Linearkombination von 1 und e^x sein.)

α) Im *Ansatz der rechten Seite* hat man $\mu+\mathrm{i}\omega=1$. Die Zahl 1 ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, also muss ein Resonanzfaktor x zusätzlich zum Erstansatz erscheinen.

β) Man löst die DGL mit dem methodisch richtigen Ansatz $x\mathrm{e}^x(Ax+B)$ und findet z.B. $y(x)=-\frac{1}{6}x\mathrm{e}^x(x+4)$. Die Lösungen sind dann von der Gestalt $C_1+C_2\mathrm{e}^x-\frac{1}{6}x\mathrm{e}^x(x+4)$ mit komplexen Zahlen C_1, C_2. Der angebliche Ansatz passt zu keiner dieser Lösungen.

d) Falsch.
Aus $f(t)*1=f(t)$ folgt $\mathcal{L}[f(t)](s)\cdot\frac{1}{s}=\mathcal{L}[f(t)](s)$ (für Stellen s, wo $\mathcal{L}[f(t)](s)$ überhaupt existiert). Dann gilt $\mathcal{L}[f(t)](s)=0$. Nach dem Satz von Lerch folgt, dass $f(t)$ mit der Nullfunktion übereinstimmen muss. Widerspruch.

e) Wahr.
In der Potenzreihenentwicklung

$$J_n(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

verschwindet der Faktor x^n für $x=0$ für jede positive natürliche Zahl n

Hingegen ist $J_0(0)=1$.