Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 13/14

G. Penn-Karras 10. April 2014

April – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

11 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}$ der Differentialgleichung

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

2. Aufgabe

8 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = \delta_1(t), \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Dabei steht $\delta_1(t)$ für die Dirac-Funktion, die an der Stelle 1 konzentriert ist.

3. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben ist das reelle Randanfangswertsproblem

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9u(x,t), \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

a) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$, wobei die Funktion $X(x)$ periodisch und nicht-konstant ist.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung, die die zusätzliche Anfangsbedingung
$$u(x,0) = 2\sin x + 3\sin 4x$$
erfüllt.

Hinweise: Konstruieren Sie Ihre Separationskonstante λ so, dass die DGL für X von der Form $X'' - \lambda X = 0$ ist. In Teil a) ergibt sich automatisch, dass auch $T(t)$ periodisch ist.

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben ist für $x > 0$ die reelle lineare inhomogene Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 2x.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$ ein Fundamentalsystem (eine Lösungsbasis) für die Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bilden.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

5. Aufgabe 9 Punkte

Ein reelles nichtlineares dynamisches System $\big(x(t), y(t)\big)$ wird durch das DGL-System

$$\dot{x} = (x-2)(y-9), \qquad \dot{y} = (x-4)(y-1)$$

beschrieben. Ermitteln Sie alle Gleichgewichtspunkte zusammen mit dem Stabilitätscharakter („asymptotisch stabil", „stabil", „instabil").

Für Aufgabe 6 bitte wenden!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

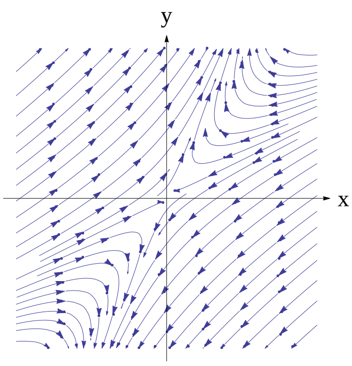
a) Das reelle Anfangswertsproblem $y' = \mathrm{e}^x \ln y,\ y(0) = 1$, hat genau eine Lösung mit maximalem Definitionsbereich.

b) Es gibt eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten, die die Funktion $y(x) = x\cos x$ als eine Lösung hat.

c) Das Verhalten des dynamischen Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

in der Nähe des Gleichgewichtspunkts $(0,0)$ wird durch das Phasenporträt



beschrieben.

d) Es gibt eine stetige Funktion $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ von exponentieller Ordnung mit $f(t) > 0$, die die Eigenschaft $f(t) * f(t) = t$ hat.

(Das Symbol $*$ steht für das Faltungsprodukt im Sinne der Laplace-Transformation.)

e) Ist n eine gerade ganze Zahl, so ist die Bessel-Funktion $J_n(x)$ eine gerade Funktion (das heißt, ihr Graph ist achsensymmetrisch).

($J_n(x)$ ist die Bessel-Funktion 1. Art zum Index n.)