Musterlösung — DGL f. Ing., 10. April 2014

1. Aufgabe

11 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies 0 = (2-\lambda)(-\lambda)^2 - (-\lambda)(-1)$$

$$= (2-\lambda)\lambda^2 - \lambda = \lambda((2-\lambda)\lambda - 1) = \lambda(2\lambda - \lambda^2 - 1) = -\lambda(-2\lambda + \lambda^2 + 1) = -\lambda(\lambda-1)^2$$

ergeben sich der der einfache Eigenwert 0 und der doppelte Eigenwert 1.

Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist eindimensional:

$$\text{Kern}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist eindimensional:

$$\text{Kern}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Beim Eigenwert 1 ist die algebraische Vielfachheit größer als die geometrische Vielfachheit.

Folglich ist ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor h zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch Anschauen der 2. Spalte findet man als eine inhomogene Lösung:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Die allgemeine Lösung ist dann durch

$$\vec{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

gegeben.

2. Aufgabe

8 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned}
s^2X - 1 - 3sX + 2X &= \mathrm{e}^{-s} \\
(s^2 - 3s + 2)X - 1 &= \mathrm{e}^{-s} \\
X &= \frac{1}{s^2 - 3s + 2} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2 - 3s + 2}
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}.$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned}
X(s) &= \mathcal{L}\left[-\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \mathrm{e}^{-s}\left(-\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right)\right] \\
&= \mathcal{L}\left[-\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t}\right] + \mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}\left[-\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t}\right](s) \\
x(t) &= -\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t} + u_1(t)\left(-\mathrm{e}^{t-1} + \mathrm{e}^{2(t-1)}\right)
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

11 Punkte

a) Partielle DGL ergibt: $X''(x)T(t) - X(x)T''(t) = 9X(x)T(t)$
Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{T''(t)}{T(t)} = 9 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = 9 + \frac{T''(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T''(t) - (\lambda - 9)T(t) = 0.$$

Aus der Randbedingung

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

folgt mit $u(x,t) = X(x)T(t)$ die Aussage $X(0) = X(\pi) = 0$.
Für die DGL $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ kann es nicht-konstante periodische Lösungen nur für $\lambda < 0$ geben. Wir setzen $\sqrt{-\lambda} := \mu$. Dann ist

$$\begin{gathered} X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ X(0) = C_1 = 0 \implies X(\pi) = C_2 \sin \mu\pi = 0 \\ \implies C_2 = 0 \text{ oder } \sin \mu\pi = 0 \end{gathered}$$

Nicht-verschwindende Lösungen $X(x)$ gibt es für solche Werte von μ, die die Gleichung $\sin \mu\pi = 0$ erfüllen. μ muss gleich einer natürlichen Zahl n mit $n > 0$ sein. Damit ist λ gleich einer der Zahlen λ_n mit

$$\lambda_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Aus der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

folgt mit $u(x,t) = X(x)T(t)$ die Aussage $T'(0) = 0$.
Wegen $\lambda < 0$ ist $\lambda - 9 = -\mu^2 - 9 < 0$ und damit sind die Funktionen $T(t)$ ohne weiteres Zutun bereits periodisch mit der Kreisfrequenz $\sqrt{\mu^2 + 9}$.
Für jede Wahl von n ergeben sich für T zwei Lösungen $T_{n,1}$ und $T_{n,2}$ mit

$$T_{n,1}(t) = \cos \sqrt{\mu^2 + 9}\, t, \quad T_{n,2}(t) = \sin \sqrt{\mu^2 + 9}\, t$$

Mit $T'(0) = 0$ folgt, dass die Funktionen $T_{n,2}$ nicht verwendet werden können.
Für $u(x,t)$ hat man also die Funktionen $u_n(x,t)$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$u_n(x,t) := \sin nx \cos \sqrt{n^2 + 9} t$$

gefunden.

b) Mit der Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \cos \sqrt{n^2+9}\, t$$

sind Koeffizienten A_n zu suchen mit

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = u(x,0) = 2\sin x + 3\sin 4x$$

also

$$A_1 = 2,\ A_4 = 3, \qquad A_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1,4\};$$

Damit hat man für die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = 2\sin x \cos \sqrt{10}\, t + 3\sin 4x \cos 5t.$$

4. Aufgabe 11 Punkte

a) Die zugehörige homogene DGL lautet

$$y''_{\text{hom}} - 2x^{-1}y'_{\text{hom}} + 2x^{-2}y_{\text{hom}} = 0.$$

Die angegebenen Funktionen lösen diese homogene DGL:

$$\begin{aligned} y = x: &\quad y'' - 2x^{-1}y' + 2x^{-2}y = 0 - 2x^{-1}\cdot 1 + 2x^{-2}\cdot x = 0 - 2x^{-1} + 2x^{-1} = 0 \\ y = x^2: &\quad y'' - 2x^{-1}y' + 2x^{-2}y = 2 - 2x^{-1}\cdot 2x + 2x^{-2}\cdot x^2 = 0 - 2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Mit dem Wronski-Test zeigt man, dass diese Lösungen für $x > 0$ linear unabhängig sind: Die Wronski-Determinante ist wegen

$$\det\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}_{|x=1} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

für $x > 1$ von Null verschieden. Damit sind die angegebenen Lösungen linear unabhängig.

b) Innerhalb der Methode *Variation der Konstanten* hat man Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ zu bestimmen, die die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

erfüllen. Es ist

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 2x & -x^2 \\ -1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} -2x^3 \\ 2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2x \end{pmatrix}$$

Damit lautet eine partikuläre Lösung y_{p}:

$$y_{\text{p}} = -x^2\cdot x + 2x\cdot x^2 = x^3.$$

Die allgemeine Lösung der vollen (inhomogenen) DGL ist dann

$$y(x) = x^3 + C_1x + C_2x^2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Aufgabe

9 Punkte

Die Gleichgewichtspunkte (GGPe) (x^*, y^*) lösen die Gleichungen

$$0 = (x^* - 2)(y^* - 9), \qquad 0 = (x^* - 4)(y^* - 1).$$

Man findet $(x^*, y^*) = (2, 1)$ und $(x^*, y^*) = (4, 9)$.
Für den Stabilitätscharakter berechnet man die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}(x, y)$:

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} y-9 & x-2 \\ y-1 & x-4 \end{pmatrix}.$$

Für den GGP $(2, 1)$ hat man

$$\mathcal{J}(2, 1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Diagonalmatrix hat nur negative Eigenwerte. Damit ist der GGP $(4, 1)$ asymptotisch stabil.

Für den GGP $(4, 9)$ hat man

$$\mathcal{J}(4, 9) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Spur ist 0, die Determinante ist -16, damit sind die Eigenwerte gleich -4 und 4. Damit ist der GGP $(4, 9)$ instabil.

6. Aufgabe 10 Punkte

a) Wahr.
Weil die $\mathbb{R}^2$-Funktion $\mathrm{e}^x \ln y$ in der oberen Halbebene $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ stetig differenzierbar und dort der Anfangspunkt $(0,1)$ liegt, gibt es nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz genau eine Lösung des vorgelegten Anfangswertsproblems mit Definitionsbereich.

Es gilt: $y(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Falsch.
Mit $x \cos x$ ist auch $x \sin x$ eine Lösung, und wegen des Resonanzfaktors x sind $\cos x$ und damit $\sin x$ Lösungen. Also liegen mindestens vier linear unabhängige Lösungen vor, damit kann die Ordnung der DGL nicht gleich 2 sein.

c) Falsch.
Die Eigenwerte der Systemmatrix haben beide negativen Realteil, damit ist der GGP asymptotisch stabil. Das Phasenporträt suggeriert aber einen instabilen GGP.

d) Wahr.
Die Funktion $\mathbf{1}$ besitzt die gewünschten Eigenschaften. Insbesondere ist

$$\mathcal{L}[\mathbf{1} * \mathbf{1}](s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} = \mathcal{L}[t](s),$$

woraus nach dem Satz von Lerch $\mathbf{1} * \mathbf{1} = t$ folgt.

Heuristische Alternative: Aus $f(t) * f(t) = t$ folgt $\big(\mathcal{L}[f(t)](s)\big)^2 = \frac{1}{s^2}$ (für Stellen s, wo $\mathcal{L}[f(t)](s)$ überhaupt existiert). Dann gilt $\mathcal{L}[f(t)](s) = \pm\frac{1}{s}$. Nach dem Satz von Lerch folgt $f(t) = \pm\mathbf{1}$ Wegen $f(t) > 0$ bleibt $f(t) = \mathbf{1}$. Es gibt also eine Funktion $f(t)$ mit den gewünschten Eigenschaften.

(Das Symbol $\mathbf{1}$ steht für die konstante Funktion mit dem Wert 1.)

e) Wahr.
In den Summanden der Potenzreihenentwicklung

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

erscheint x in Form der Potenzen x^{n+2m}. Für gerades n sind die Exponenten $n+2m$ gerade, damit ist auch die Funktion $J_n(x)$ gerade.

Für ungerades n ist $J_n(x)$ ungerade.